Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
Институт прикладной астрономии РАН

П.А. Тараканов, А.В. Веселова, М.И. Волобуева,
В.В. Григорьев, М.В. Костина, Б.Б. Эскин

Задачи XXVI Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады

Санкт-Петербург
2019

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор К.В. Холшевников (СПбГУ)
доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Пронин (РГПУ им. Герцена)

*Печатается по постановлению
Учебно-методической комиссии по укрупненной группе направлений
и специальностей 03.00.00 «Физика и астрономия»*

**Тараканов П.А., Веселова А.В., Волобуева М.И.,
Григорьев В.В., Костина М.В., Эскин Б.Б.**

Задачи XXVI Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады:
учебно-методическое пособие — СПб, 2019. — 91 с.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на XXVI Санкт-Петербургской Астрономической олимпиаде (2018–2019 учебный год) и решения задач. Сборник может быть использован как для углубленного изучения астрономии в средней школе (в том числе для подготовки к олимпиадам различных уровней), так и в рамках курса «Общая астрономия» студентов Астрономического отделения СПбГУ и других университетов, ведущих подготовку астрономов или учителей физики и астрономии.

1 Введение

В 1993 году в Санкт-Петербурге прошла первая экспериментальная городская олимпиада по астрономии. Она была настолько экспериментальной, что даже не получила порядкового номера. Правила ее проведения сильно отличались от последующих олимпиад, в частности не было разделения по возрастным группам.

Следующая олимпиада — 1994 года — проводилась уже по правилам, которые в своей основе сохранились до настоящего времени. Школьникам было предложено пять заданий, разбитых на две группы: для 8–9 и 10–11 классов. В 1995 году впервые появились задания для 6 и 7 классов, которые впоследствии стали обязательной составной частью олимпиад, а в 2009 году появилась и параллель 5 класса.

Олимпиада развивалась, увеличивалось количество участников олимпиады. Это привело к необходимости предварительного отбора участников, и к концу 90-х годов появился заочный отборочный (а затем, с 2010 года, и очный) тур, задача которого состояла в предварительном отборе участников теоретического тура олимпиады.

Постепенно сформировались традиции Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. Среди этих традиций — задачи, максимально приближенные к реальной работе астронома, желательно на основе реальных астрономических событий и данных, составление практически непересекающихся комплектов заданий для различных возрастных параллелей, причем только «собственного производства». На Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде запрещается пользоваться калькуляторами, чтобы приучать школьников проводить оценочные расчеты и корректно учитывать точность используемых данных.

С 2003 года олимпиада стала открытой, в ней начали принимать участие школьники из различных регионов РФ, а затем и других стран. Начиная с 2010 года туры олимпиады проводятся одновременно во многих городах. В последние годы олимпиада проходит примерно на 50 площадках в различных регионах России и 12 других стран.

Предлагаемые на Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде задачи, как правило, обладают некоторыми специфическими особенностями. Первой особенностью является необычно большая доля задач астрофизической тематики, в том числе и тех разделов, которые, как правило, в традиционных курсах астрономии для школ и кружков практически не рассматриваются (физика межзвездной среды, космология, радиоастрономия и т.д.). В целом от участника олимпиады требуется не только умение решать задачи по астрономии «классического» типа, но и широкие знания по всем разделам астрономии и умение этими знаниями пользоваться.

Еще одной особенностью является необходимость оценки промежуточных данных, нужных для решения задач. Как правило, участникам олимпиады сообщаются только те числовые данные, которые школьники заведомо не могут оценить или получить из других известных им величин (по крайней мере, за отведенное на решение задач время). Основные физические константы также считаются известными участникам.

Как правило, задачи олимпиады требуют для решения повышенного уровня знаний по физике и математике. Например, уравнение, получившееся в процессе решения задачи, может оказаться нетривиальным, и для его решения потребуется либо воспользоваться каким-либо «олимпиадным» математическим приемом, либо аккуратно упростить его, воспользовавшись физически корректным приближением. В силу специфики предмета олимпиады необходимые дополнительные знания по физике и математике нередко выходят даже за пределы «классической» тематики физических и математических олимпиад. В качестве примеров можно упомянуть физику излучения (в т.ч. и квантовую), ядерную физику, некоторые разделы математического анализа и геометрии, теорию погрешностей и т.д.

По сложившейся традиции какими-либо вычислительными средствами (калькуляторами и т.п.) на заключительном этапе олимпиады (теоретическом и практическом турах) пользоваться запрещено, однако на олимпиадах практически отсутствуют задачи, решить которые без трудоемких вычислений невозможно. В то же время иногда встречаются задачи, существенным элементом решения которых является нахождение эффективных методов получения численного ответа.

На каждом из туров, кроме практического, участникам предлагается решить по 5 задач. На решение задач очного отборочного тура отводится 3 часа, при этом можно пользоваться калькуляторами, но не справочными данными и литературой. Заочный отборочный тур занимает около месяца, при выполнении его заданий можно пользоваться любыми данными (нередко для решения задачи нужно предварительно найти какие-либо дополнительные данные) и любой вычислительной техникой (в частности, одним из возможных методов решения задач может быть программное моделирование).

На турах заключительного этапа — теоретическом и практическом — запрещены уже любые справочные данные и вычислительная техника. На решение 5 задач теоретического тура у участников есть 4 часа, на практическом туре, продолжающемся 2.5 часа, в каждой параллели предлагается одна (иногда две) задачи, связанных с обработкой наблюдательных данных, их интерпретацией, разработкой методов наблюдений и т.п.

Туры	**Класс**						
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
очный отборочный	1–5			6–10		11–15	16–20
заочный отборочный	21–25		26–30		31–35	36–40	41–45
теоретический	45–50		51–55		56–60	61–65	66–70
практический	71		72		73	74	73, 75

В таблице указано, на каком из туров и каким классам предлагались задачи, включенные в сборник. По традиции задачи для младших возрастных параллелей общие для двух (иногда трех) классов, однако итоговый конкурс является раздельным и места победителей и призеров присуждаются в каждом классе отдельно.

В разделе 2 сборника для удобства самостоятельной работы с ним приведены только условия задач, раздел 3 содержит как условия, так и решения задач.

Авторами задач, включенных в сборник, являются С.В. Васильев, А.В. Веселова, М.И. Волобуева, В.В. Григорьев, В.А. Дмитриев, М.В. Костина, П.А. Тараканов, К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин, Б.Б. Эскин.

2 Условия задач

Задача № 1

Сближение астероида Апофис с Землей состоится 13 апреля 2029 года. Определите, в какой день недели это случится.

Задача № 2

В каком месяце может произойти покрытие звезды θ Весов полной Луной? Почему?

Задача № 3

Как-то осенью отправившийся в лес за грибами грибник увидел Луну вблизи Плеяд, наполовину освещенную Солнцем. В какой четверти — первой или третьей — была Луна? Поясните свой ответ.

Задача № 4

Расположите в хронологическом порядке в пределах одного календарного года следующие события: день Нового Года, день зимнего солнцестояния, день Нового года по юлианскому календарю, день прохождения Землей перигелия своей орбиты. Обоснуйте свой ответ.

Задача № 5

Спутники Сатурна Рея и Гиперион обладают следующими параметрами: масса Реи составляет $2.3 \cdot 10^{21}$ кг, диаметр равен 1528 км. Масса Гипериона составляет $5.7 \cdot 10^{18}$ кг, диаметр равен 266 км. Оцените отношение плотностей Реи и Гипериона.

Задача № 6

Какие планеты Солнечной системы могут покрывать друг друга (и первая — вторую, и вторая — первую) для наблюдателя с Земли? Перечислите все возможные пары таких планет. Каким был бы ответ на тот же вопрос, если бы он был задан 20 лет назад?

Задача № 7

21 сентября на экваторе Солнце взошло одновременно с заходом Луны. Оцените, насколько будет отличаться время захода Солнца и восхода Луны там же в этот же день? Что произойдет раньше?

Задача № 8

Крабовидная туманность появилась в результате вспышки Сверхновой 1054 года, расположенной на расстоянии 2 кпк от Солнца. Сейчас ее угловой диаметр равен $6'$. Оцените среднюю скорость, с которой края туманности удалялись от места вспышки.

Задача № 9

Оцените максимальное расстояние, на котором сейчас принципиально возможно наблюдать звезды, являющиеся копиями Солнца.

Задача № 10

Вокруг звезды массой 2 массы Солнца по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, обращаются две планеты. Радиусы орбит планет равны 2 а.е. и 4 а.е. Жители планет обмениваются радиосигналами в моменты наибольшего сближения планет. Определите, сколько времени проходит между сеансами радиосвязи и сколько времени идет сигнал от внутренней планеты к внешней?

Задача № 11

Как известно, светимости звезд Главной последовательности примерно пропорциональны четвертой степени их масс. Как зависит от массы звезды время ее жизни на Главной последовательности?

Задача № 12

12 августа 2018 года был запущен космический зонд Parker Solar Probe, созданный для изучения Солнца. Планируется, что минимальная высота эллиптической орбиты зонда над фотосферой Солнца будет составлять всего 9 радиусов Солнца, а орбитальный период — 88 суток. Угол наклона орбиты зонда будет составлять $3^\circ.4$ к плоскости эклиптики. На какое максимальное расстояние от плоскости эклиптики будет отходить зонд?

Задача № 13

Арктур является одной из первых звезд, у которых было открыто собственное движение; оценку собственного движения осуществил в 1718 году Эдмунд Галлей. Какое расстояние с тех пор прошел Арктур, если лучевая скорость звезды равна -5 км/с, годичный параллакс $0''.1$, собственное движение $2''$/год?

Задача № 14

Космические туристы осматривают объекты в поясе астероидов своей планетной системы. На осмотр каждого объекта отводится одинаковое время. Сначала туристы подлетают к астероиду радиусом 300 км, космический корабль выключает двигатели и переходит на круговую орбиту высотой 30 км. После одного витка они перелетают к астероиду той же плотности радиусом 100 км. Какую высоту должна иметь орбита, чтобы полет занял то же время? Астероиды можно считать сферическими.

Задача № 15

16 июня происходит покрытие Нептуна Луной. В тот же день Нептун находится в стоянии. 22 ноября Нептун также находится в стоянии. Какова была фаза Луны 16 июня? В каком созвездии это все происходило?

Задача № 16

Концентрация вещества в гигантском молекулярном облаке межзвездной среды 3×10^2 см$^{-3}$, а температура вещества облака 10 K. Оцените концентрацию вещества межзвездной среды в межоблачном пространстве рядом с облаком, если известно, что его температура составляет $\sim 10^4$ K.

Задача № 17

Эллиптическая галактика M49 имеет угловые размеры $10' \times 8'$. Ее средняя поверхностная яркость равна 13^m с квадратной минуты. Расстояние до M49 равно 16 Мпк. Определите абсолютную звездную величину галактики, пренебрегая поглощением света.

Задача № 18

12 августа 2018 года был запущен космический зонд Parker Solar Probe, созданный для изучения Солнца. Планируется, что минимальная высота эллиптической орбиты зонда над фотосферой Солнца будет составлять всего 9 радиусов Солнца. Определите, когда аппарат должен в первый раз достичь перигелия своей орбиты, если считать, что после старта с Земли он движется по эллипсу Гомана.

Задача № 19

Процитируем анекдот:

> Звериная сходка в зоопарке.
>
> Лев: Вы опоздали. Было сказано, что встречаемся на закате.
>
> Жираф: Мне все еще видно солнце, коротышка.

Оцените время, на которое мог опоздать жираф на сходку, если известно, что зоопарк находится на широте Петербурга и сходка происходила в день осеннего равноденствия. Поскольку олимпиада не по биологии, сообщим также, что рост жирафов достигает 6 м.

Задача № 20

Двойная звезда с компонентами, похожими на Солнце, находится на расстоянии 1 кпк от Солнца и имеет орбитальный период 22 тысячи лет. Орбита звезд круговая и лежит в картинной плоскости. Какой потребуется телескоп, если наблюдателю нужно увидеть данные звезды по отдельности?

Задача № 21

1 июня дрейфующая полярная станция оказалась в 10 км от Северного полюса. В тот день была прекрасная ясная погода. Один из полярников в 23 часа по местному времени вышел на льдину поразмяться и посмотреть на звезды. Сколько (примерно) звезд он увидел? Ответ объясните.

Задача № 22

«Ночь выдалась удивительно удачной для наблюдателя. Солнце зашло пару часов назад, Венера сияла над горизонтом рядом с ярким Регулом, Юпитер же располагался менее чем в градусе от тусклой λ Водолея». На какой планете мог находиться наблюдатель?

Задача № 23

Солнце совершает оборот вокруг центра Галактики приблизительно за 220 миллионов лет. Определите, какое расстояние за данное время прополз бы большой придорожный слизень, скорость движения которого составляет 15 см/мин, и выразите это расстояние в астрономических единицах.

Задача № 24

Вовочка записал, что июньская полная Луна покрыла «яркую звезду». Что это могла быть за звезда?

Задача № 25

На изображении Сатурна экваториальный диаметр планеты оказался равен 1 см. На расстоянии 2.2 см от поверхности планеты находится изображение спутника Сатурна. Какой это спутник: Энцелад, Тефия или Диона? Почему?

Задача № 26

Две планеты имеют одинаковые угловые размеры для наблюдателя на Земле. Какие это могут быть планеты?

Задача № 27

Астроном из Москвы наблюдает Меркурий в восточной элонгации. Кто из его коллег — житель Екатеринбурга или Калининграда — может успеть в те же сутки провести аналогичные наблюдения?

Задача № 28

Наблюдатель, находящийся в кенийском городе Накуру, направил телескоп точно в зенит, чтобы полюбоваться кратерами на Луне. Рассчитайте, как быстро Луна полностью выйдет из поля зрения неподвижного телескопа, если изначально она находилась в его центре. Размер поля зрения телескопа составляет $2°$. В какой фазе находилась Луна, если было 18 часов местного времени?

Задача № 29

Для связи с марсоходами используется радиосвязь, что позволяет посылать им команды даже днем. Тем не менее существуют промежутки времени, когда марсоход не может получить команды с Земли. Перечислите возможные причины этого. Оцените, насколько длительным может быть такой промежуток времени из-за той или иной причины. Для упрощения задачи можно считать, что орбита Марса лежит в плоскости орбиты Земли.

Задача № 30

В ядре галактики M60–UCD1 находится черная дыра с массой около 20 миллионов масс Солнца, что составляет 15% от массы всей галактики. При этом половина массы всей галактики заключена в центральной области диаметром 160 световых лет. Какая в среднем масса приходится на кубический парсек в этой области?

Задача № 31

Во сколько раз могут отличаться отношения видимых угловых размеров Меркурия и Марса для земного наблюдателя? Орбиты считать круговыми.

Задача № 32

В телескоп-рефлектор системы Ньютона (диаметр зеркала 116 мм, фокусное расстояние 1 м) наблюдают полную Луну при равнозрачковом увеличении. Затем телескоп закрывают крышкой с круглым отверстием радиусом 1.5 см, центр которого находится посередине между центром и краем крышки. Опишите, как изменилось изображение Луны, видимое в телескоп.

Задача № 33

Предполагается, что планетарная туманность объекта Сакураи возникла и начала расширяться 8300 лет назад. Сейчас видимый диаметр туманности равен $44''$. Оцените среднюю скорость расширения туманности, если она находится на расстоянии 5 кпк от Солнца.

Задача № 34

Спутник движется вокруг Земли в сторону вращения Земли по круговой орбите с радиусом 38400 км. В некий день он пролетел над пунктом 20° с.ш., 15° в.д. Какую долготу будет иметь пункт на той же широте, над которым спутник пролетит через оборот по орбите?

Задача № 35

Серпуховский школьник Мокий сделал сэлфи, держа смартфон на горизонтально вытянутой руке строго вертикально. На снимке запечатлелась Луна, касаясь своим краем верха фото. Мокий моментально отправил сэлфи своей подруге Снежане в Лисий Нос с подписью «Луна выше сегодня не поднимется». Снежана тут же увидела фото и захотела сделать точно такое же. Через какое время она сможет его сделать? Какой угол с горизонтом должна составлять рука Снежаны, если ее смартфон точно такой же, как у Мокия, и она тоже держит его перпендикулярно руке? (Координаты Серпухова: 55° с.ш., $37^\circ.5$ в.д., координаты Лисьего Носа: 60° с.ш., 30° в.д.)

Задача № 36

В некоторый день звезда Денеб ($\alpha = 20^h41.5^m$) достигла максимальной высоты над горизонтом в $8^h41.5^m$ утра по истинному солнечному времени. На какой минимальной высоте под горизонтом в этот день будет находиться Солнце для наблюдателя в Санкт-Петербурге?

Задача № 37

В результате наблюдений спиральной галактики, видимой с ребра, оказалось, что спектральная линия, имеющая лабораторную длину волны 6563 Å, наблюдается на длинах волн от 6556 Å до 6570 Å. Оцените максимальную линейную скорость вращения вещества в галактике вокруг ее центра.

Задача № 38

Неправильная переменная звезда в момент времени t_1 имела звездную величину $m_1 = +2^m.0$. В момент t_2 она была на 30% слабее, чем в t_1, а в момент t_3 она была на 30% ярче, чем в t_2. В момент t_3 звезда ярче или слабее, чем в момент t_1? Найдите m_2, m_3 (т.е. звездные величины звезды в моменты t_2 и t_3).

Задача № 39

Фотография ниже была сделана 12 декабря 2002 года. Определите звездное и солнечное время в момент съемки с точностью до четверти часа.

К задаче № 39.

Задача № 40

Космический аппарат массой 100 кг обращается по круговой орбите радиусом 40 тысяч км. В него врезается осколок космического мусора массой 2 кг. Считая столкновение лобовым и неупругим, а скорость осколка равной 3 км/с и направленной навстречу скорости космического аппарата, оцените расстояние до центра Земли в перигее новой орбиты.

Задача № 41

Насколько раньше или позже по всемирному времени наступит заход Солнца для наблюдателя в Екатеринбурге ($\varphi_E = 56°50', \lambda_E = 60°35'$) по сравнению с наблюдателем в Санкт-Петербурге ($\varphi_C = 59°57'$, $\lambda_C = 30°20'$) 27 июля? Рефракцией, видимыми размерами Солнца и уравнением времени пренебречь.

Задача № 42

Светимость звезды составляет $6.4 \cdot 10^3$ светимостей Солнца, температура — 4460 K. Представим, что звезду поместили на место Солнца. Между современных орбит каких двух планет располагалась бы поверхность данной звезды?

Задача № 43

Поглощение света атмосферой Земли при наблюдениях в зените составляет $0^m.2$. Оцените, каким будет поглощение при наблюдении на зенитном расстоянии 60°.

Задача № 44

Два спутника обращаются по круговым орбитам над земным экватором так, что один пролетает над другим каждые 10 часов. Каковы их периоды обращения по орбите, если отношение радиусов их орбит равно 4?

Задача № 45

Ведется радиолокация некоторого внешнего астероида, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики. Установлено, что время прохождения радиосигнала до астероида в противостоянии в ξ раз меньше, чем в ближайшей (по времени) к противостоянию квадратуре. Постройте график зависимости интервала времени между противостоянием и квадратурой от параметра ξ.

Задача № 46

Пассажир поезда видит в правом окне Венеру, а в левом — полную Луну. В каком направлении ехал поезд?

Задача № 47

Ранним новогодним утром 1 января 2019 года космический аппарат «Новые горизонты» пролетел мимо объекта (486958) 2014 MU_{69} из пояса Койпера, более известного как «Ультима Туле», и сфотографировал его. Оцените время, прошедшее между началом отправки фотографии «Новыми горизонтами» и началом приема данных на Земле, если «Ультима Туле» в момент пролета аппарата находился на расстоянии 43 астрономических единицы от Солнца?

Задача № 48

Известно, что длина экватора Нептуна примерно в 4 раза длиннее земного экватора. Также известно, что объем Сатурна в 14 раз больше объема Нептуна. Во сколько раз земной экватор длиннее или короче, чем экватор Сатурна?

Задача № 49

3 февраля 1488 года португальский моряк Бартоломеу Диаш первым из европейцев открыл мыс Доброй Надежды. В какой день недели это случилось?

Задача № 50

27 июля 2018 года произошло уникальное астрономическое событие: великое противостояние Марса произошло одновременно с полным центральным затмением Луны, которое к тому же стало самым продолжительным лунным затмением в XXI веке. В какой фазе и в каком созвездии можно наблюдать Луну сегодня, в день теоретического тура? В каком созвездии и в какое время суток можно наблюдать Марс сегодня, в день теоретического тура? Период обращения Марса вокруг Солнца 1.9 земного года.

Задача № 51

В середине ноября радиант метеорного потока находился выше всего над горизонтом в предрассветные часы. Какой это мог быть поток — Леониды или Эта-Аквариды? Почему?

Задача № 52

Правитель маленького, но гордого королевства, не разобравшись с устройством современного календаря, повелел с 1 января 2019 года жить по календарю, в котором год длится ровно 360 дней. В каком году по принятому в России календарю 1 января снова совпадет с 1 января по королевскому календарю?

Задача № 53

Два астронома в Петербурге и в некоторой обсерватории наблюдают Вегу. Высота верхней кульминации звезды в двух пунктах отличается на $3°$, при этом в обсерватории Вега поднимается на бóльшую высоту к югу от зенита. Известно, что в обсерватории Вега достигает наибольшей высоты над горизонтом на 1 час 58 минут раньше, чем в Петербурге. Определите координаты обсерватории и оцените расстояние между Петербургом и обсерваторией.

Задача № 54

Во время радиолокации астероида Диомед Юпитер находился в восточной квадратуре. Сколько времени длился единичный сеанс радиолокации? Известно, что Диомед движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Юпитер, но обгоняет его на 1/6 периода.

Задача № 55

27 июля 2018 года произошло уникальное астрономическое событие: великое противостояние Марса произошло одновременно с полным центральным затмением Луны. При этом во время максимальной фазы затмения Марс был на 2 звездных величины ярче Луны. Оцените, во сколько раз одна квадратная секунда видимого диска Марса была ярче одной квадратной секунды диска Луны. Известно, что разница на одну звездную величину означает, что объект ярче в ≈ 2.5 раза. Радиус Марса в два раза меньше радиуса Земли, радиус орбиты Марса составляет 1.5 а.е.

Задача № 56

Илон Маск мечтает сделать интернет доступным для всех. Для этого он планирует запустить множество спутников на орбиты с одинаковой высотой. Рассчитайте период обращения одного спутника и их минимальное количество, если по техническому заданию устойчивый прием возможен в случае, когда спутник находится на высоте не менее 40° над горизонтом.

Задача № 57

Полярник, встречавший восход Солнца в 2018 году на северном полюсе Земли, обнаружил, что верхняя точка диска Солнца впервые появилась на горизонте в некотором направлении. Будет это направление тем же или нет в 2019 году? Если нет — чему будет равен угол между этими направлениями и в какую сторону от направления 2018 года его надо будет отсчитывать? Изменением атмосферной рефракции из-за смены погодных условий пренебречь.

Задача № 58

Затмение Агафокла — одно из самых известных античных затмений — произошло 15 августа 310 года до н.э. Это затмение было полным на Геллеспонте (сейчас этот пролив называется Дарданеллы, 40° с.ш., 30° в.д.), где его наблюдал Калипп. Известно, что Аристил с Тимохарисом наблюдали это затмение в Александрии (30° с.ш., 30° в.д.), причем они видели, что тень Луны двигалась перпендикулярно меридиану. Оцените максимальную фазу затмения в Александрии.

Задача № 59

Оцените, какая часть звезд, хотя бы иногда оказывающихся над горизонтом в Петербурге, всегда оказывается в верхней кульминации к северу от зенита.

Задача № 60

Некоторая звезда обладает видимой звездной величиной 7^m и ненулевым собственным движением. Какова будет ее видимая звездная величина в тот момент, когда собственное движение звезды уменьшится в 4 раза? Полная скорость звезды остается постоянной.

Задача № 61

В момент каждого противостояния астероида земной наблюдатель измеряет его видимую звездную величину. Период обращения астероида равен 3.9 года. Оцените эксцентриситет его орбиты, если амплитуда изменения видимой звездной величины составляет 2.5^m. Орбиту Земли считаем круговой.

Задача № 62

В 2013 году АМС Voyager 1 записала «звуки космоса» — магнитозвуковые волны в плазме, частота которых оказалась равной примерно 2–3 кГц. Считая, что с такой же частотой менялось давление газа в окрестности АМС, оцените наименьшие возможные характерные размеры областей повышенной плотности в газе, в котором находилась станция.

Задача № 63

Докажите, что проекция траектории движения Луны относительно Солнца на плоскость эклиптики не имеет самопересечений и везде выпукла наружу.

Задача № 64

Звездолет подлетел к звезде главной последовательности и вышел на круговую орбиту с радиусом 0.5 а.е. и периодом обращения 0.25 года. На звездолете установлена ловушка для вещества, собирающая частицы звездного ветра с площади 1 м^2 и запасающая их кинетическую энергию. Также звездолет с помощью солнечных батарей площади 2 м^2 запасает энергию излучения звезды с эффективностью 30%. Известно, что звезда ежегодно теряет 10^{-14} собственной массы в виде звездного ветра, движущегося со скоростью около $4 \cdot 10^2$ км/с. Во сколько раз запасаемая энергия излучения превосходит запасаемую энергию частиц звездного ветра?

Задача № 65

Любитель астрономии без телескопа видит на небе две ярких звезды. Прикидывая угловое расстояние между ними, он обнаружил, что между этими двумя звездами не могут поместиться четыре сжатых пальца одной вытянутой руки. Кроме этого, известно, что первая звезда имеет модуль эклиптической широты, равный $10°$, а азимут захода второй звезды в Петербурге составляет 160°. Какая из этих звезд ярче? Рефракцией пренебречь.

Задача № 66

ИСЗ движется по круговой орбите с высотой 200 км и пролетает через зенит. Найдите время, в течение которого его наблюдаемая угловая скорость будет больше половины максимальной.

Задача № 67

Работавший в Париже «ловец комет» Шарль Мессье составил свой знаменитый каталог туманных объектов в конце XVIII века по данным наблюдений на нескольких телескопах, в среднем соответствующих рефрактору с диаметром входного отверстия 6 см, находящемуся в идеальных условиях. В каталог, в частности, вошли 28 спиральных галактик. Оцените полное число спиральных галактик, в которых при использовании современных оптических телескопов принципиально возможно наблюдать отдельные звезды (без учета вспыхивающих).

Задача № 68

Американский спутник Vanguard-1 является четвертым искусственным спутником Земли. Он представляет собой алюминиевую сферу диаметром 16 см с шестью длинными тонкими антеннами. Спутник был запущен 17 марта 1958 года на орбиту, период обращения для которой составляет 134 минуты, эксцентриситет орбиты $e = 0.184$, наклон $i = 34^\circ.2$. Когда проще увидеть спутник при наблюдении из Петербурга: в апогее или перигее? Альбедо алюминия считать равным единице.

Задача № 69

Известно, что концентрация фотонов, испущенных абсолютно черным телом, непосредственно около этого тела может быть вычислена как $n \approx 20\,T^3$ (где температура дана в кельвинах, а концентрация выражена в см$^{-3}$). Оцените суммарное количество фотонов, находящихся в данный момент внутри Галактики.

Задача № 70

Космический аппарат находится на геостационарной орбите Земли. Удельный импульс его двигателя 4500 м/с. Масса космического аппарата без топлива составляет одну тонну. Масса топлива — 6.4 тонны. Сможет ли он покинуть Солнечную систему? Если нет — почему? Если да — как?

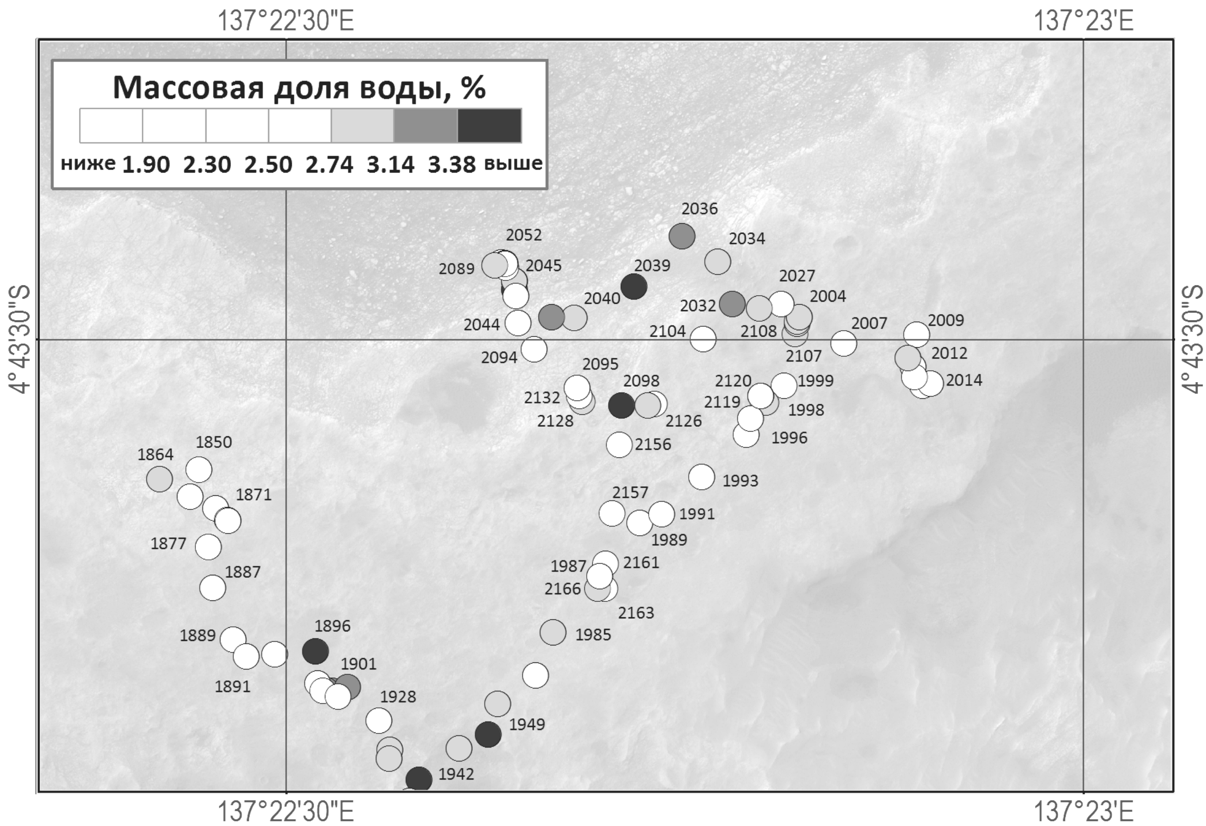
Задача № 71

Вам дана карта, показывающая, в каких точках в течение 2018 года марсоход Curiosity производил измерения процентного содержания водяного льда в марсианском грунте при помощи прибора «ДАН», изготовленного российскими учеными. Рядом с кружочками подписаны номера солов — марсианских суток, когда делались измерения. На карте приведена сетка ареографических координат: буква E означает восточную долготу, а буква S означает южную широту. Масштаб по обеим осям одинаков.

По этой карте определите насколько возможно точнее:

1. ареографические координаты мест, в которых удалось обнаружить максимальное содержание водяного льда за 2018 год;
2. длину траектории марсохода (в километрах);
3. среднюю скорость марсохода.

Не забудьте подробно описать методику получения данных. Можно считать, что диаметр Марса в два раза меньше диаметра Земли, сутки на Марсе длятся 24 часа 40 минут.



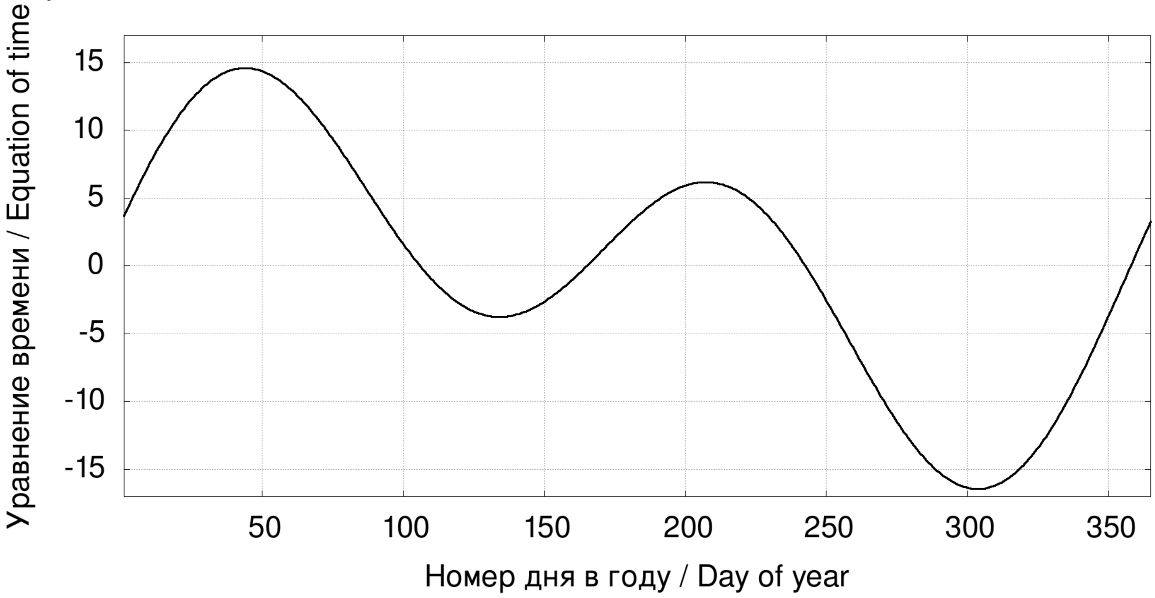
К задаче № 71.

Задача № 72

На каждой из шести фотографий на следующей странице представлены положения Солнца в некоторой местности в одно и то же среднее солнечное время, но в разные дни года. Для каждой фотографии укажите, в каком полушарии и в какое время суток (утро, день или вечер) производилась съемка. Какая фотография сделана дальше всего от экватора? Объясните все сделанные Вами выводы.

Можно считать, что среднее солнечное время — это время, которое показывают обычные часы, а истинное солнечное время — время, которое показывают солнечные часы.

Разность между средним и истинным солнечным временем (так называемое «уравнение времени») в зависимости от номера дня в году представлена на рисунке ниже:

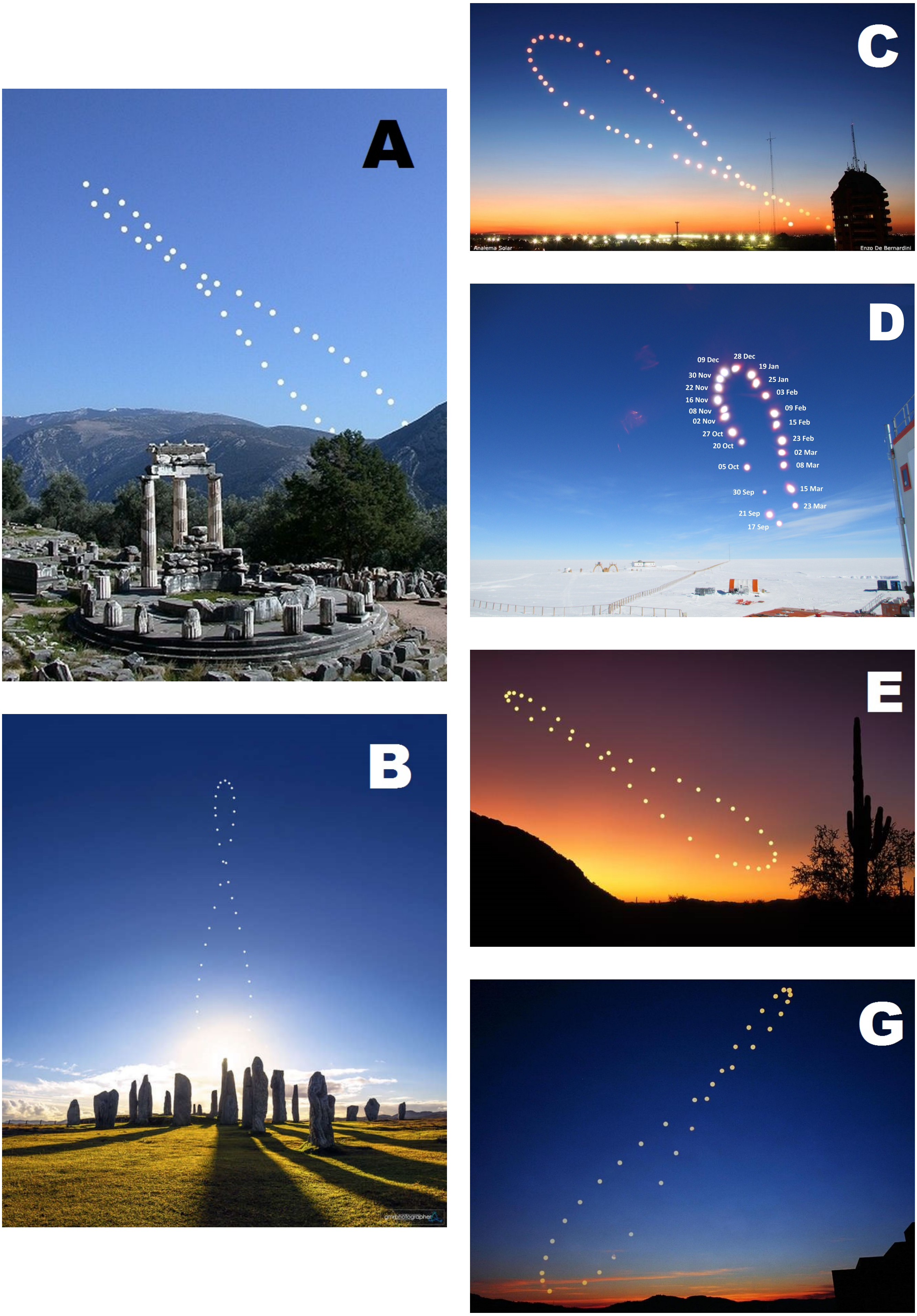


Задача № 73

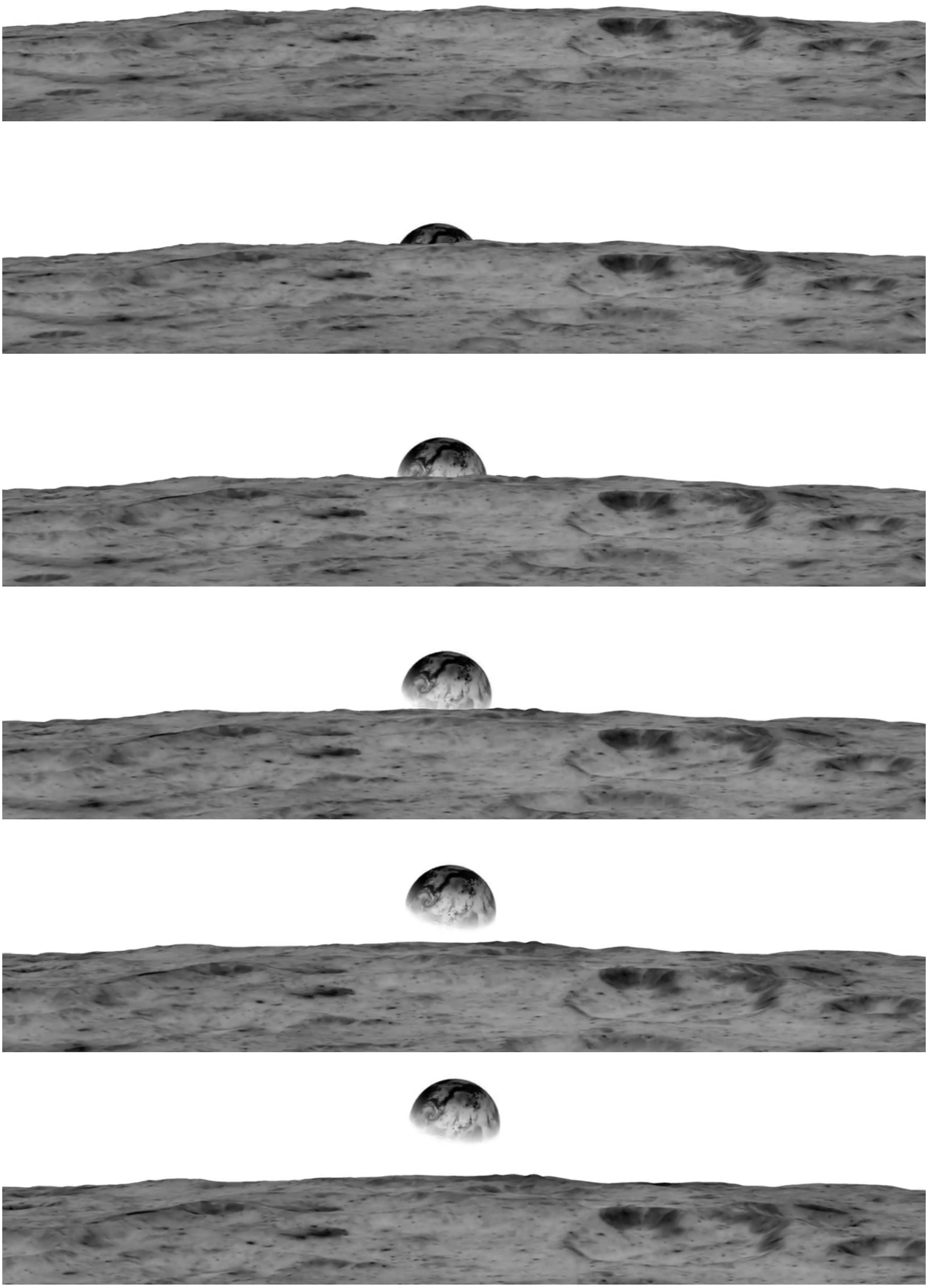
Серия снимков Земли на следующей странице была сделана космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите вокруг Луны. Оцените, на какой высоте над поверхностью Луны летел аппарат, если известно, что интервал времени между соседними снимками равняется 8 секундам. Можно считать, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а диаметр — в 4 раза меньше диаметра Земли.

Задача № 74

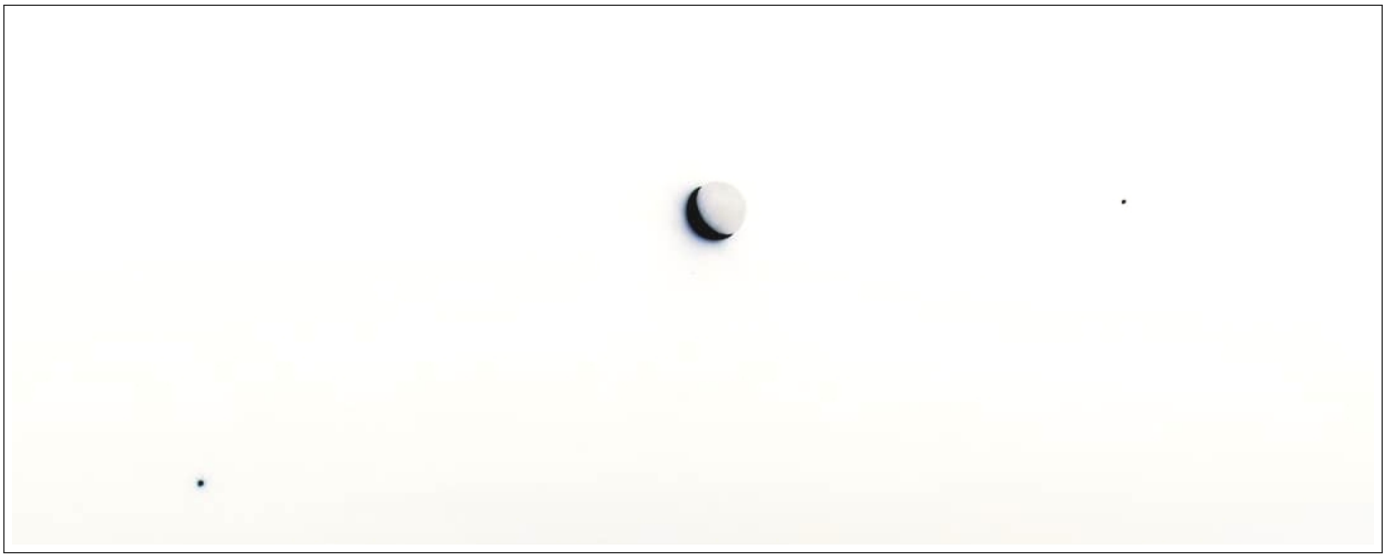
31 января 2019 года на небе можно было наблюдать Луну рядом с Юпитером и Венерой. Этим воспользовались два любителя астрономии, живущие в Северном полушарии, которые сфотографировали это явление. Вам даны вырезки из их фотографий (негативы). Воспользовавшись фотографиями, сделайте следующее:

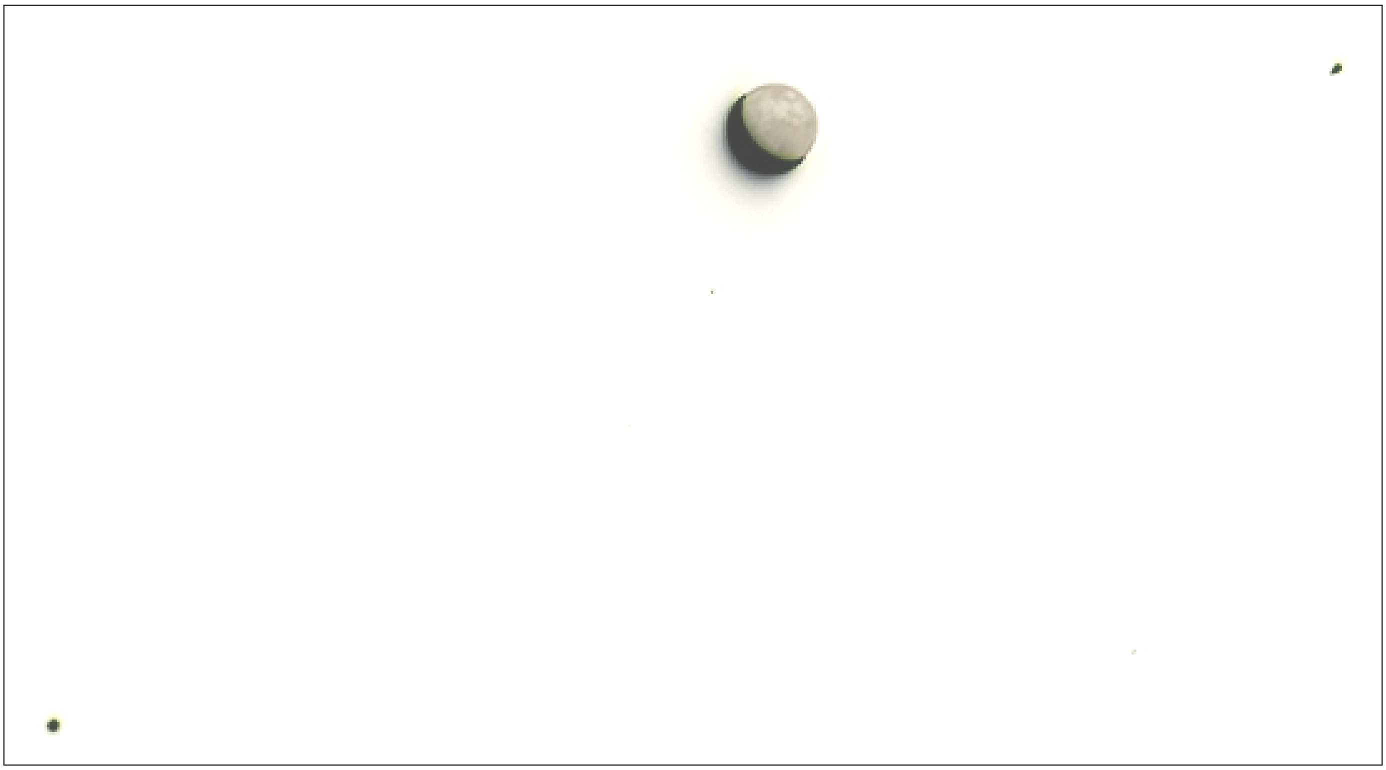

A
B
C
Analema Solar
Enzo De Bernardini
D
09 Dec
28 Dec
19 Jan
30 Nov
25 Jan
22 Nov
03 Feb
16 Nov
09 Feb
08 Nov
02 Nov
15 Feb
27 Oct
23 Feb
20 Oct
02 Mar
08 Mar
05 Oct
15 Mar
30 Sep
23 Mar
21 Sep
17 Sep
E
G

К задаче № 72.



К задаче № 73.





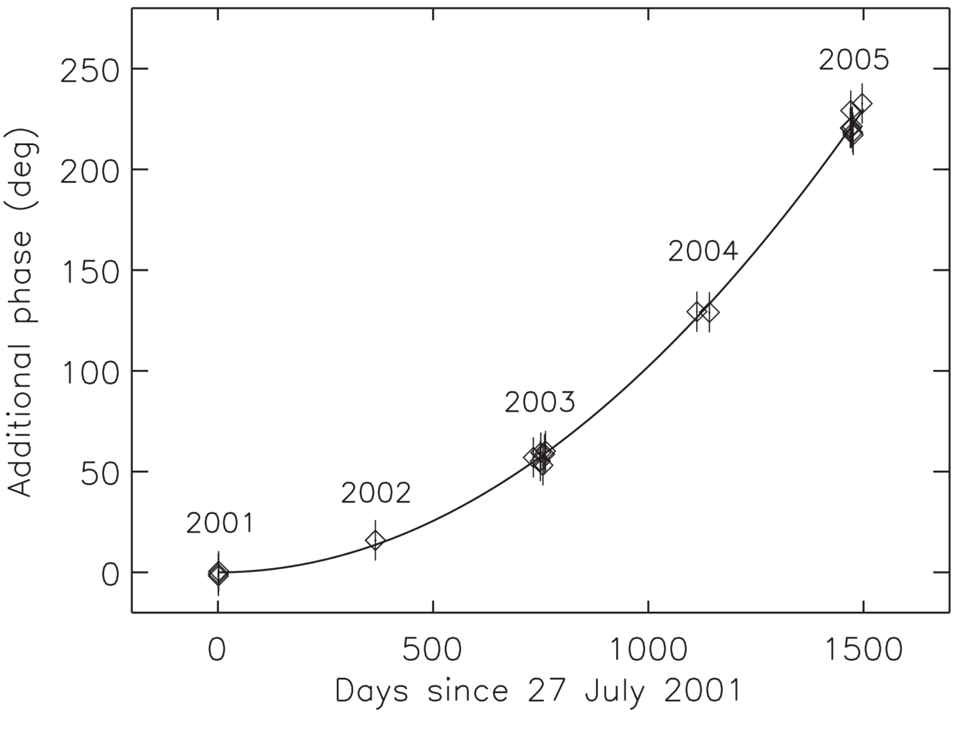
К задаче № 74.

- отождествите небесные тела на фотографиях;
- определите как можно точнее время, прошедшее между снимками;
- определите, в каком созвездии в это время находилась Луна;
- оцените расстояния до планет в момент события;
- оцените расстояние между точками на Земле, где были сделаны фотографии, если известно, что азимуты центров фотографий в обеих точках были примерно одинаковы.

Можно считать, что нижние границы каждой из вырезок параллельны горизонту, а все планеты движутся вокруг Солнца по круговым орбитам в плоскости эклиптики.

Задача № 75

Астероид 54509 YORP неравномерно вращается вокруг своей оси. На графике ниже показана поправка к фазовому углу в градусах (как функция времени), которую необходимо добавлять к зависимости фазового угла от времени для равномерного вращения, чтобы результат соответствовал наблюдательным данным. Определите вид зависимости наблюдаемого фазового угла от времени и найдите параметры этой зависимости. Предложите возможные причины подобной неравномерности.



К задаче № 75.

По оси абсцисс отложено время в сутках (начиная с 27 июля 2001 года), по оси ординат — поправка к фазовому углу в градусах. Подписи к точкам на графике — год получения соответствующих данных.

3 Решения задач

Задача № 1

Сближение астероида Апофис с Землей состоится 13 апреля 2029 года. Определите, в какой день недели это случится.

Решение. День тура — 21 ноября, и это среда. До 13 апреля 2019 года пройдет еще 9 дней этого ноября, декабрь, январь, февраль, март и 13 дней апреля, до 13 апреля 2029 года — еще десять полных лет, причем три из них (2020, 2024 и 2028) будут високосными. Таким образом, со дня тура до интересующей нас даты пройдет

$$9 + 31 + 31 + 28 + 31 + 13 + 365 \times 10 + 3 = 3796 \text{ дней.}$$

Разделим это число на 7 и найдем остаток от деления, он окажется равным 2. Это означает, что сближение Апофиса с Землей произойдет двумя днями недели позже среды, т.е. в пятницу.

Задача № 2

В каком месяце может произойти покрытие звезды θ Весов полной Луной? Почему?

Решение. Поскольку Луна должна быть полной, то она в момент покрытия должна находиться примерно в противоположной области неба относительно Солнца. Известно, что Солнце в Весах находится примерно в ноябре, тогда покрытия должно произойти за полгода до ноября (или через полгода), т.е. в мае.

Задача № 3

Как-то осенью отправившийся в лес за грибами грибник увидел Луну вблизи Плеяд, наполовину освещенную Солнцем. В какой четверти — первой или третьей — была Луна? Поясните свой ответ.

Решение. Звездное скопление Плеяды расположено в созвездии Тельца. В этом созвездии Солнце бывает примерно с середины мая до середины июня (вообще говоря, с такой точностью знать это не требуется, достаточно отметить, что это где-то в районе астрономической весны). Поскольку грибник отправился собирать грибы осенью, то Солнце, в своем годичном движении «отстающее» от суточного вращения неба, должно было сместиться на восток от Плеяд (для наших широт — попросту налево). Таким образом, освещенной должна быть левая половина Луны, а это означает, что она находится в третьей (или «последней») четверти.

Задача № 4

Расположите в хронологическом порядке в пределах одного календарного года следующие события: день Нового Года, день зимнего солнцестояния, день Нового года по юлианскому календарю, день прохождения Землей перигелия своей орбиты. Обоснуйте свой ответ.

Решение. Начнем с примерного (хотя бы) определения дат указанных событий. Новый Год празднуется 1 января, зимнее солнцестояние происходит где-то в 20-х числах декабря (например, в 2018 году зимнее солнцестояние произойдет в ночь с 21 на 22 декабря), день Нового года по юлианскому календарю («Старый Новый год»), который сейчас приходится на 14 января, в течение по крайней мере нескольких ближайших десятков тысяч лет будет сдвигаться на все более позднюю дату года, перигелий орбиты Земля проходит в начале января (3 января). Поэтому правильная последовательность *в течение одного календарного года* выглядит так: Новый год, прохождение перигелия, Старый Новый год, зимнее солнцестояние.

Задача № 5

Спутники Сатурна Рея и Гиперион обладают следующими параметрами: масса Реи составляет $2.3 \cdot 10^{21}$ кг, диаметр равен 1528 км. Масса Гипериона составляет $5.7 \cdot 10^{18}$ кг, диаметр равен 266 км. Оцените отношение плотностей Реи и Гипериона.

Решение. Будем считать спутники шарообразными. Тогда диаметр, плотность и масса спутника связаны соотношением

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho,$$

а это означает, что масса спутника прямо пропорциональна произведению его плотности на куб диаметра. Тогда отношение плотностей можно выразить через массу и диаметр следующим образом:

$$\frac{\rho_\text{р}}{\rho_\text{г}} = \frac{M_\text{р}}{M_\text{г}} \cdot \left(\frac{D_\text{г}}{D_\text{р}}\right)^3 = \frac{2.3 \cdot 10^{21}}{5.7 \cdot 10^{18}} \cdot \left(\frac{266}{1528}\right)^3 \approx 2.$$

Задача № 6

Какие планеты Солнечной системы могут покрывать друг друга (и первая — вторую, и вторая — первую) для наблюдателя с Земли? Перечислите все возможные пары таких планет. Каким был бы ответ на тот же вопрос, если бы он был задан 20 лет назад?

Решение. Из условия следует, что каждая из такой пары планет должна иметь возможность оказаться между Землей и другой планетой на одной прямой. Поскольку планеты вращаются вокруг Солнца по примерно круговым орбитам (которые не пересекаются), то в том случае, если обе планеты внешние, подобная ситуация невозможна — более далекая от Солнца планета всегда при покрытии окажется и более далекой от Земли. Если одна из планет внешняя, а другая — внутренняя, требование также невозможно выполнить — внешняя планета во время покрытия всегда будет дальше. И только в том случае, если обе планеты внутренние, возможна ситуация, когда каждая из них при покрытии может оказаться как ближе к Земле, так и дальше. Но поскольку внутренних планет ровно две, это означает, что есть только одна искомая пара планет — Меркурий и Венера.

Двадцать лет назад ситуация отличалась: к числу планет относился Плутон. Его орбита существенно вытянута, в результате чего он иногда оказывается ближе к Солнцу, чем Нептун. Однако периоды обращения Плутона и Нептуна вокруг Солнца с высокой точностью относятся как $3 : 2$, в результате чего Плутон никогда не подходит близко к Нептуну (и, как следствие, покрытие одного другим при наблюдении с Земли оказывается невозможным). Таким образом, 20 лет назад ответ на вопрос был бы таким же.

Задача № 7

21 сентября на экваторе Солнце взошло одновременно с заходом Луны. Оцените, насколько будет отличаться время захода Солнца и восхода Луны там же в этот же день? Что произойдет раньше?

Решение. 21 сентября — это день осеннего равноденствия, следовательно, Солнце в этот день движется по небесному экватору (суточная параллель Солнца совпадает с небесным экватором). Так как во время восхода Солнца оно и Луна оказались в противоположных точках небесной сферы, то Луна в этот день находится в точке весеннего равноденствия, и ее «мгновенная» суточная параллель также совпадает с небесным экватором.

Как Солнце, так и Луна, вследствие орбитальных движений, движутся навстречу суточному вращению небесной сферы, причем за сутки Луна по своей орбите проходит $360°/27.3 \approx 13°$ относительно звезд, а Солнце — около $1°$. Как следствие, за сутки Луна отстанет от Солнца примерно на $12°$, а за половину суток — на $6°$.

Заметим, что орбита Луны наклонена к плоскости эклиптики (на угол около $5°$), эклиптика в свою очередь наклонена к экватору (на угол $23°.4$), но это означает, что максимально возможный угол наклона орбиты Луны к экватору меньше $30°$, и учет наклона приводит к сравнительно небольшой поправке (в $\approx \cos 30° \approx 0.9$ раза).

Таким образом, восход Луны отстанет от захода Солнца примерно на $6/360 = 1/60$ часть суток, что составляет 24 минуты. Можно отметить, что в решении выше не учитывалась атмосферная рефракция, однако ее характерная величина меньше, чем основной эффект, связанный с суточным движением Луны, поэтому в качестве оценки можно использовать уже полученный ответ, округлив его до получаса.

Задача № 8

Крабовидная туманность появилась в результате вспышки Сверхновой 1054 года, расположенной на расстоянии 2 кпк от Солнца. Сейчас ее угловой диаметр равен $6'$. Оцените среднюю скорость, с которой края туманности удалялись от места вспышки.

Решение. Примерно за тысячу лет края туманности прошли $3'$ на небе. Поскольку по определению парсека на расстоянии 2 кпк от Солнца угол в $1''$ соответствует расстоянию 2000 а.е., это означает, что за прошедшее время края прошли расстояние $2000 \cdot 3 \cdot 60 = 3.6 \cdot 10^5$ а.е. Следовательно, скорость равна 360 а.е./год. Если перевести эту величину в км/с, получится около $1.7 \cdot 10^3$ км/с.

Задача № 9

Оцените максимальное расстояние, на котором сейчас принципиально возможно наблюдать звезды, являющиеся копиями Солнца.

Решение. Известно, что абсолютная звездная величина Солнца составляет около $+5^m$, а предельная проницающая способность телескопов — около $+30^m$. Поскольку блеск звезды падает обратно пропорционально квадрату расстояния до нее, а изменение блеска в 100 раз соответствует изменению на 5^m, получаем, что при удалении звезды в 10 раз ее видимая звездная величина увеличивается на 5^m. Абсолютная звездная величина — это видимая звездная величина со стандартного расстояния 10 пк, соответственно, звездой $+30^m$ звездной величины Солнце будет, если оно окажется в 10^5 раз дальше, т.е., на расстоянии около 1 Мпк.

Задача № 10

Вокруг звезды массой 2 массы Солнца по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, обращаются две планеты. Радиусы орбит планет равны 2 а.е. и 4 а.е. Жители планет обмениваются радиосигналами в моменты наибольшего сближения планет. Определите, сколько времени проходит между сеансами радиосвязи и сколько времени идет сигнал от внутренней планеты к внешней?

Решение. Для наблюдателя с внутренней планеты в момент сеанса радиосвязи внешняя планета находится в противостоянии со звездой. Тогда расстояние между планетами равно разности радиусов орбит: $L = a_2 - a_1 = 2$ а.е. Известно, что свет от Солнца до Земли идет около 8 минут, в данном же случае расстояние вдвое большее, то есть время распространения сигнала составляет примерно 16 минут.

Определим периоды обращения планет вокруг звезды по третьему закону Кеплера в рамках сопоставления данной системы с Солнечной. Для этого периоды обращения выразим в годах, радиус орбиты — в астрономических единицах, массу звезды — в массах Солнца:

$$\frac{T_{1,2}^2}{a_{1,2}^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$$

Отсюда периоды обращения планет равны $T_1 = 2$ года, $T_2 \approx 5.7$ лет.

Интервал времени между сеансами связи будет соответствовать синодическому периоду внешней планеты для наблюдателя на внутренней планете, при этом

$$S = \frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1} \approx 3.1 \text{ года}.$$

Заметим, что формально можно рассмотреть также случай, когда планеты обращаются вокруг звезды в разные стороны, однако в действительности таких планетных систем не бывает.

Задача № 11

Как известно, светимости звезд Главной последовательности примерно пропорциональны четвертой степени их масс. Как зависит от массы звезды время ее жизни на Главной последовательности?

Решение. За время жизни на Главной последовательности (ГП) из водорода, находящегося в центре звезды, синтезируется гелий, энерговыделение в этом процессе в конечном счете и обеспечивает светимость звезды. Поскольку звезды ГП в первом приближении устроены одинаково, можно считать, что доля массы звезды, превращающаяся в гелий, примерно постоянна, а это означает, что произведение светимости звезды L и времени ее жизни τ пропорционально массе звезды $\mathfrak{M}$.

Тогда $\tau \propto \mathfrak{M}/L$ и, поскольку $L \propto \mathfrak{M}^4$, получаем, что $\tau \propto \mathfrak{M}^{-3}$, т.е. время жизни звезды обратно пропорционально кубу ее массы.

Задача № 12

12 августа 2018 года был запущен космический зонд Parker Solar Probe, созданный для изучения Солнца. Планируется, что минимальная высота эллиптической орбиты зонда над фотосферой Солнца будет составлять всего 9 радиусов Солнца, а орбитальный период — 88 суток. Угол наклона орбиты зонда будет составлять $3^\circ.4$ к плоскости эклиптики. На какое максимальное расстояние от плоскости эклиптики будет отходить зонд?

Решение. Так как орбита зона наклонена к плоскости эклиптики (это сделано из-за того, что в ходе приближения к Солнцу аппарат несколько раз будет совершать гравитационный маневр у Венеры, у которой именно такой угол наклона орбиты), то иногда аппарат будет «над» эклиптикой, а иногда — «под». Чем дальше аппарат расположен от Солнца, тем дальше от эклиптики он находится. Значит в конечном счете нас интересует апоцентр орбиты.

При помощи третьего закона Кеплера по известному периоду вычислим большую полуось орбиты зонда. Проще всего работать в системе единиц «годы — астрономические единицы» (т.е. фактически сравнивать зонд с Землей):

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{88}{365}\right)^2} = 0.39 \text{ а.е.}$$

Минимальная высота над фотосферой Солнца дает нам перицентрическое расстояние $r_\pi = a(1-e) = 10$ радиусов Солнца $= 0.05$ а.е., откуда можно найти эксцентриситет e. Подставляя найденное значение в выражение для апоцентрического расстояния, получим $r_\alpha = a(1+e) = 0.8$ а.е.

Чтобы найти расстояние от эклиптики, необходимо домножить получившееся значение на синус угла наклона орбиты (можно и на сам угол, выраженный в радианах, поскольку он мал). Итоговый ответ получается около 0.05 а.е. или 7×10^6 км.

Задача № 13

Арктур является одной из первых звезд, у которых было открыто собственное движение; оценку собственного движения осуществил в 1718 году Эдмунд Галлей. Какое расстояние с тех пор прошел Арктур, если лучевая скорость звезды равна -5 км/с, годичный параллакс $0''.1$, собственное движение $2''$/год?

Решение. Определим полную пространственную скорость звезды. Тангенциальная компонента скорости выражается через собственное движение как $v_\tau \approx 5\mu/\pi = 20$ а.е./год $\approx 10^2$ км/с.

Это означает, что лучевой компонентой скорости можно пренебречь. С 1718 года до 2018 года прошло 300 лет, т.е. пройденное Арктуром расстояние равно $3 \cdot 10^2 \times 20 = 6 \cdot 10^3$ а.е. (или $9 \cdot 10^{11}$ км).

Задача № 14

Космические туристы осматривают объекты в поясе астероидов своей планетной системы. На осмотр каждого объекта отводится одинаковое время. Сначала туристы подлетают к астероиду радиусом 300 км, космический корабль выключает двигатели и переходит на круговую орбиту высотой 30 км. После одного витка они перелетают к астероиду той же плотности радиусом 100 км.

Какую высоту должна иметь орбита, чтобы полет занял то же время? Астероиды можно считать сферическими.

Решение. Для круговой орбиты высоты h можно записать III закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}} \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G\frac{4}{3}\pi R^3\rho}, \quad \text{отсюда} \quad T^2 = \frac{3\pi}{G\rho}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3.$$

Обозначим параметры орбиты и первого астероида величинами с индексом 1, второго — с индексом 2. Тогда равенство периодов приводит к соотношению

$$\frac{3\pi}{G\rho}\left(1+\frac{h_1}{R_1}\right)^3 = \frac{3\pi}{G\rho}\left(1+\frac{h_2}{R_2}\right)^3 \Rightarrow \frac{h_1}{R_1} = \frac{h_2}{R_2} \Rightarrow h_2 = h_1\frac{R_2}{R_1} = 10 \text{ км}.$$

Задача № 15

16 июня происходит покрытие Нептуна Луной. В тот же день Нептун находится в стоянии. 22 ноября Нептун также находится в стоянии. Какова была фаза Луны 16 июня? В каком созвездии это все происходило?

Решение. Стояния планеты — это точки на ее видимой траектории, где планета меняет направление видимого движения с прямого на обратное и наоборот. В эти моменты угловая скорость планеты равна нулю. Посередине петли попятного движения планета оказывается в противостоянии с Солнцем с максимумом угловой скорости. Следовательно, противостояние Нептуна произошло посередине между 16 июня и 22 ноября. Между 16 июня и 22 ноября прошло 159 дней. Следовательно, между 16 июня и противостоянием прошло примерно 80 дней, т.е. оно случилось в районе 4 сентября. Так как период обращения Нептуна вокруг Солнца очень большой (около 165 лет), то можно считать, что за 159 дней Нептун практически не сдвинулся среди звезд и все его видимое движение относительно Солнца обусловлено исключительно орбитальным движением Земли. Земля проходит по орбите примерно 1° в день. Таким образом, между первым стоянием и противостоянием Нептуна Солнце в своем видимом годичном движении сдвинулось примерно на 80°. Так как Нептун находится намного дальше от Солнца, чем Земля, то направление на него с Земли и с Солнца можно считать одним и тем же. Следовательно, в момент покрытия Луной Нептуна фазовый угол (угол между лучом света, падающим от Солнца на Луну, и лучом, отразившимся от нее в сторону наблюдателя) также примерно равен $\varphi = 80^\circ$. Отсюда фаза Луны равна $\Phi = \cos^2\frac{\varphi}{2} \approx 0.6$. Так как Нептун не движется относительно звезд, то он и 16 июня, и 4 сентября находится в одном и том же созвездии. Это созвездие противоположно тому, в котором Солнце бывает 4 сентября (т.к. 4 сентября — противостояние), т.е. то, в котором Солнце бывает 4 марта — Водолей.

Задача № 16

Концентрация вещества в гигантском молекулярном облаке межзвездной среды 3×10^2 см$^{-3}$, а температура вещества облака 10 K. Оцените концентрацию вещества межзвездной среды в межоблачном пространстве рядом с облаком, если известно, что его температура составляет $\sim 10^4$ K.

Решение. Гигантское молекулярное облако (ГМО) будет стабильным в том случае, если давление вещества внутри облака совпадает с давлением внешней среды. Действительно, если давление в облаке больше, то оно будет расширяться, а если меньше — сжиматься. Газ и в ГМО, и вне его имеет очень низкую плотность, его можно считать идеальным, поэтому выразим давления вещества облака и внешней среды через соответствующие концентрации $n_{\text{ГМО}}$, n_0 и температуры $T_{\text{ГМО}}$, T_0, приравняем их и отсюда найдем ответ:

$$n_{\text{ГМО}}\, kT_{\text{ГМО}} = n_0\, kT_0,$$

откуда

$$n_0 = n_{\text{ГМО}} \frac{T_{\text{ГМО}}}{T_0} = 3 \times 10^2 \frac{10}{10^4} = 3 \times 10^{-1}\ \text{см}^{-3}.$$

Задача № 17

Эллиптическая галактика M49 имеет угловые размеры $10' \times 8'$. Ее средняя поверхностная яркость равна 13^m с квадратной минуты. Расстояние до M49 равно 16 Мпк. Определите абсолютную звездную величину галактики, пренебрегая поглощением света.

Решение. Поскольку галактика эллиптическая, ее форма на небе — эллипс. Найдем ее площадь (с учетом того, что в условии даны большая и малая оси): $S = \pi \times 5' \times 4' = 63\ \square'$ (обозначим так квадратные минуты). Учитывая поверхностную яркость $m_0 = 13^m/\square'$, найдем видимую звездную величину галактики по формуле Погсона:

$$m - m_0 = -2.5 \lg \frac{E}{E_0} = -2.5 \lg \frac{SE_0}{E_0} = -2.5 \lg S \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad m = 13^m - 2.5 \lg 63 = 13^m - 4.5^m = 8.5^m$$

По условию можно пренебречь поглощением света в нашей Галактике (для корректного учета этого фактора необходимо знать точное местоположение M49 относительно плоскости Млечного Пути), так что абсолютная звездная величина $M = m - 5 \lg r + 5 = 8.5^m - 5 \lg(16 \cdot 10^6) + 5^m = -22^m.5$.

Заметим, что можно сделать чуть более грубую оценку, если посчитать галактику прямоугольником (с площадью 80 $\square'$), галактика при этом окажется чуть ярче ($M = -22^m.8$).

Задача № 18

12 августа 2018 года был запущен космический зонд Parker Solar Probe, созданный для изучения Солнца. Планируется, что минимальная высота эллиптической орбиты зонда над фотосферой Солнца будет составлять всего 9 радиусов Солнца. Определите, когда аппарат должен в первый раз достичь перигелия своей орбиты, если считать, что после старта с Земли он движется по эллипсу Гомана.

Решение. Эллипс Гомана — траектория, которая (в данном случае) в апоцентре орбиты касается стартовой орбиты, а перицентре — конечной орбиты.

Поскольку радиус Солнца (и 10 радиусов Солнца) много меньше астрономической единицы, с хорошей точностью можно считать, что перицентрическое расстояние равно нулю. Поэтому рассмотрим движение по эллипсу с большой полуосью, равной 0.5 а.е., воспользовавшись III законом Кеплера (для упрощения вычислений желательно использовать систему единиц «годы–астрономические единицы»). Надо также не забыть, что нас интересует движение только до перицентра, поэтому время движения t в два раза меньше периода обращения по такой орбите. Вычисляем $t = \sqrt{0.5^3}/2 = 0.18$ года, что составляет 65–66 суток. Таким образом, это могло бы произойти 16–17 октября 2018 года.

В реальности же первое прохождение перигелия запланировано на 24 декабря 2024 года в связи с большим количеством гравитационных маневров у Венеры.

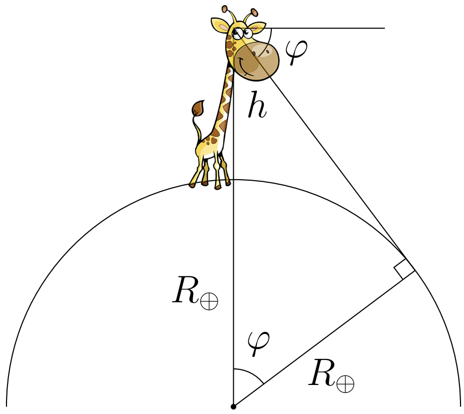
Задача № 19

Процитируем анекдот:

> Звериная сходка в зоопарке.
>
> Лев: Вы опоздали. Было сказано, что встречаемся на закате.
>
> Жираф: Мне все еще видно солнце, коротышка.

Оцените время, на которое мог опоздать жираф на сходку, если известно, что зоопарк находится на широте Петербурга и сходка происходила в день осеннего равноденствия. Поскольку олимпиада не по биологии, сообщим также, что рост жирафов достигает 6 м.

Решение. Нарисуем картинку (несколько утрированную), связывающую высоту жирафа h и угол φ, на который для жирафа понижается горизонт:



Заметим, что этот угол вычисляется так: $\cos\varphi = \frac{R_\oplus}{R_\oplus+h} = \frac{R_\oplus+h-h}{R_\oplus+h} \approx 1 - \frac{h}{R_\oplus}$. С учетом того, что угол φ очевидно мал, его косинус можно вычислить как $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Приравниваем оба выражения и получаем:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2h}{R_\oplus}},$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли, составляющий примерно 6400 км, а угол выражен в радианах.

Дальнейший ход решения зависит от того, учитываем мы высоту льва или нет. Можно считать, что лев приблизительно плоский, но можно и оценить реальную высоту льва (она около $1-1.5$ метра) и вычислить понижение горизонта также для него. Начнем с первого, более простого случая.

Понижение горизонта для жирафа составит $\varphi = 0.0014$ радиана, что составляет примерно $5'$. Именно на такой угол должно опуститься Солнце на широте Петербурга (60°), пока жираф опаздывает на сходку. Солнце движется по небу с угловой скоростью 15° в час, но в Петербурге в день равноденствия заходит под углом $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ к горизонту (при этом располагаясь на экваторе), поэтому под горизонт оно опускается с вдвое меньшей скоростью (синус 30° равен как раз $1/2$). Следовательно, оно проходит $7^\circ.5 = 450'$ за час, и жираф опоздал на $5/450 = 1/90$ часа (т.е. на 40 секунд).

Если учесть, что лев все же был не плоским, то понижение горизонта для льва (высотой 1.5 м) будет в два раза меньше, чем у жирафа, что уменьшит итоговый ответ также в два раза — жираф опоздал на 20 секунд. Заметим, что именно такой мелочной придиркой, по-видимому, была вызвана резкая реакция жирафа.[1]

Задача № 20

Двойная звезда с компонентами, похожими на Солнце, находится на расстоянии 1 кпк от Солнца и имеет орбитальный период 22 тысячи лет. Орбита звезд круговая

[1] Анекдот вполне реален и позаимствован отсюда: https://www.anekdot.ru/id/932789/. Можно отметить, что сайт имеет определенное отношение к астрономии, поскольку его основатель Дмитрий Вернер — астрофизик по профессии, выпускник кафедры астрофизики Ленинградского государственного университета.

и лежит в картинной плоскости. Какой потребуется телескоп, если наблюдателю нужно увидеть данные звезды по отдельности?

Решение. Определим угловое расстояние между компонентами двойной звезды. Радиус орбиты вычислим, зная период обращения и массы компонентов, из третьего закона Кеплера, считая единицей измерения расстояния астрономическую единицу, единицей времени — год и единицей массы — массу Солнца:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{2\mathfrak{M}/M_\odot} \Rightarrow a = \left(2 \cdot (2.2 \cdot 10^4)^2\right)^{1/3} \approx 10^3 \text{ а.е.}$$

Определим угловое расстояние между звездами: $\alpha = a/d = 10^3/(10^3 \cdot 2 \cdot 10^5) = 5 \cdot 10^{-6}$ рад или $1''$. Минимальный диаметр телескопа, с помощью которого можно будет разрешить звезду на два отдельных компонента, удовлетворяет равенству $\alpha = 1.22\lambda/D$, где λ — длина волны, на которой проводится наблюдение, D — диаметр объектива. Отсюда $D = 1.22 \cdot 5 \cdot 10^{-7}/(5 \cdot 10^{-6}) = 0.12$ м.

Теперь проверим, доступны ли для наблюдения на таком телескопе компоненты данной системы. Видимая звездная величина каждой из компонентов равна $m = M_\odot - 5 + 5\lg r = 4.8 - 5 + 5\lg 10^3 = 14.8$. Минимальный диаметр телескопа, проницающая сила которого позволит наблюдать такую звезду, определяется равенством $14.8 - 6 = 5\lg(D \text{ [мм]}/5)$, отсюда $D = 10^{8.8/5} \cdot 5 \cdot 10^{-2}$ [м] ≈ 0.29 м. Таким образом, диаметр необходимого телескопа в данном случае определяется именно проницающей силой.

Задача № 21

1 июня дрейфующая полярная станция оказалась в 10 км от Северного полюса. В тот день была прекрасная ясная погода. Один из полярников в 23 часа по местному времени вышел на льдину поразмяться и посмотреть на звезды. Сколько (примерно) звезд он увидел? Ответ объясните.

Решение. 1 июня в окрестности Северного полюса полярный день, который длится почти 6 месяцев. Поэтому звезды, обычно видимые ночью, видны не будут. Но будет видна самая яркая звезда земного неба — Солнце.

Задача № 22

«Ночь выдалась удивительно удачной для наблюдателя. Солнце зашло пару часов назад, Венера сияла над горизонтом рядом с ярким Регулом, Юпитер же располагался менее чем в градусе от тусклой λ Водолея». На какой планете мог находиться наблюдатель?

Решение. Венера находилась в созвездии Льва, а Юпитер — в Водолее, почти в противоположной области неба. Следовательно, для наблюдателя Юпитер является внешней планетой. Венера при этом может быть как внешней, так и внутренней планетой. То есть гипотетический наблюдатель может быть на Меркурии, Земле или Марсе.

Задача № 23

Солнце совершает оборот вокруг центра Галактики приблизительно за 220 миллионов лет. Определите, какое расстояние за данное время прополз бы большой придорожный слизень, скорость движения которого составляет 15 см/мин, и выразите это расстояние в астрономических единицах.

Решение. В году приблизительно $3.1 \cdot 10^7$ секунд, тогда $220 \cdot 10^6$ лет составляют примерно $2.2 \cdot 10^8 \cdot 3.1 \cdot 10^7 \approx 6.8 \cdot 10^{15}$ секунд. Скорость движения выразим в м/с: $0.15/60 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ м/с. Расстояние, которое слизень прополз бы, равно

$$L = v \cdot t = 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 6.8 \cdot 10^{15} = 1.7 \cdot 10^{13} \text{ м.}$$

В астрономической единице приблизительно $1.5 \cdot 10^{11}$ м, поэтому проползаемое расстояние равно $1.7 \cdot 10^{13}/(1.5 \cdot 10^{11}) \approx 1.1 \cdot 10^2$ а.е.

Задача № 24

Вовочка записал, что июньская полная Луна покрыла «яркую звезду». Что это могла быть за звезда?

Решение. Поскольку Луна была полной, то Солнце и Луна находились в противоположных точках неба для земного наблюдателя. Солнце в июне находится в Тельце и Близнецах, тогда Луна находится в Змееносце или Стрельце в пределах 5°от эклиптики. В Змееносце в этой области ярких звезд нет, а в созвездии Стрельца подходят σ Стрельца, λ Стрельца, π Стрельца, φ Стрельца. Кроме этого, в самом начале июня полная Луна может оказаться в созвездии Скорпиона, т.е. звездой может оказаться Антарес.

Наконец, принципиально возможна ситуация, что Вовочка ошибся и принял за звезду планету. Поскольку Луна была полной, планета обязательно должна быть внешней (и, естественно, достаточно яркой). Таким образом, это могут быть Марс, Юпитер и Сатурн.

Задача № 25

На изображении Сатурна экваториальный диаметр планеты оказался равен 1 см. На расстоянии 2.2 см от поверхности планеты находится изображение спутника Сатурна. Какой это спутник: Энцелад, Тефия или Диона? Почему?

Решение. Орбиты спутников можно считать круговыми. Наибольшее удаление спутника от центра изображения планеты достигается, когда радиус-вектор спутника лежит в картинной плоскости. Тогда видимое расстояние (d) от поверхности планеты соответствует разности радиуса орбиты спутника (r) и радиуса планеты (R): $d = r - R$. По условию расстояние спутника от центра планеты получается равным $2.2 + 1/2 = 2.7$ см. Поскольку радиус Сатурна равен приблизительно $6 \cdot 10^4$ км, то $r = 2.7/0.5 \cdot 6 \cdot 10^4 \approx 3.2 \cdot 10^5$ км.

Среди указанных спутников на такое расстояние от Сатурна может удалиться только Диона, поскольку радиус ее орбиты превосходит полученное значение.

Задача № 26

Две планеты имеют одинаковые угловые размеры для наблюдателя на Земле. Какие это могут быть планеты?

Решение. Составим таблицу с минимальными и максимальными возможными угловыми размерами планет для наблюдателя на Земле. Минимальными размеры будут в случае наибольшего удаления планеты от наблюдателя, то есть при расстоянии $1+a$, где a — большая полуось орбиты планеты (в а.е.). Максимальный размер достигается в случае минимального расстояния: $|a-1|$. Угловые размеры планеты радиуса R на расстоянии r приближенно можно вычислить как

$$\alpha = \frac{2R}{r} \cdot 206265''.$$

Планета	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$
Меркурий	$5''$	$11''$
Венера	$10''$	$60''$
Марс	$3.7''$	$18''$
Юпитер	$32''$	$47''$
Сатурн	$16''$	$19.5''$
Уран	$3.6''$	$4.0''$
Нептун	$2.2''$	$2.3''$

Заметим, что интервалы для видимых угловых размеров пересекаются для Меркурия, Венеры и Марса, для Юпитера и Венеры, для Венеры, Марса и Сатурна, а также для Марса и Урана.

Задача № 27

Астроном из Москвы наблюдает Меркурий в восточной элонгации. Кто из его коллег — житель Екатеринбурга или Калининграда — может успеть в те же сутки провести аналогичные наблюдения?

Решение. Восточная элонгация означает вечернюю видимость. Даже вблизи дня летнего солнцестояния от захода Солнца до начала следующего дня проходит не менее 3 часов, поэтому в Екатеринбурге идут те же сутки, Меркурий либо низко над горизонтом, либо уже зашел. Соответственно, успеет провести наблюдения житель Калининграда.

Задача № 28

Наблюдатель, находящийся в кенийском городе Накуру, направил телескоп точно в зенит, чтобы полюбоваться кратерами на Луне. Рассчитайте, как быстро Луна полностью выйдет из поля зрения неподвижного телескопа, если изначально она находилась в его центре. Размер поля зрения телескопа составляет $2°$. В какой фазе находилась Луна, если было 18 часов местного времени?

Решение. Широта Накуру $0°17'$ ю.ш., т.е. он находится почти точно на экваторе. Между двумя последовательными одноименными кульминациями Луны проходит примерно 25 часов (точнее 24 часа 50 минут), однако тут можно пренебречь движением Луны на фоне звезд и считать, что Луна движется вместе с небесной сферой, совершая один оборот за 24 часа. Тогда Луна проходит $(1/4)°$ за минуту, а чтобы полностью уйти из поля зрения телескопа, ей надо пройти радиус поля зрения (т.е. $1°$) и еще собственный угловой радиус (т.е. $(1/4)°$). Следовательно, Луна уйдет из поля зрения телескопа через 5 минут.

Поскольку Луна была в зените в 18 часов на экваторе, это означает, что она отстает от Солнца на четверть оборота, т.е., находится в первой четверти.

Задача № 29

Для связи с марсоходами используется радиосвязь, что позволяет посылать им команды даже днем. Тем не менее существуют промежутки времени, когда марсоход не может получить команды с Земли. Перечислите возможные причины этого. Оцените, насколько длительным может быть такой промежуток времени из-за той или иной причины. Для упрощения задачи можно считать, что орбита Марса лежит в плоскости орбиты Земли.

Решение. Связаться с марсоходом невозможно, если:

- на Марсе пылевая буря (из-за чего марсоход не может зарятить аккумуляторы и вынужден работать в режиме экономии энергии);
- марсоход на невидимой стороне Марса (то есть почти всегда ночью);
- Марс «прячется» за Солнцем, т.к. оно не прозрачно для внешнего излучения.

Продолжительность пылевых бурь на Марсе достигает сотни суток. В случае невидимой стороны Марса с марсоходом не удастся связаться в течение чуть больше 12 часов. Наконец, перерыв из-за соединения Марса с Солнцем составляет примерно месяц. Можно отметить также, что последний перерыв может оказаться и больше, если в это время на Солнце происходят вспышки.

Задача № 30

В ядре галактики M60–UCD1 находится черная дыра с массой около 20 миллионов масс Солнца, что составляет 15% от массы всей галактики. При этом половина массы всей галактики заключена в центральной области диаметром 160 световых лет. Какая в среднем масса приходится на кубический парсек в этой области?

Решение. Определим массу всей галактики: поскольку масса черной дыры составляет 15% массы всей галактики, то полная масса равна

$$\mathfrak{M} = \frac{2 \cdot 10^7\ \mathfrak{M}_\odot}{0.15} = 1.3 \cdot 10^8\ \mathfrak{M}_\odot\,.$$

Поскольку в 1 парсеке приблизительно 3.26 светового года, то диаметр центральной части, выраженный в парсеках, равен $160/3.26 = 49$ пк. Объем данной области равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 = 6.2 \cdot 10^4\ \text{пк}^3.$$

Тогда средняя масса, приходящаяся на 1 кубический парсек, равна

$$m = \frac{0.5\mathfrak{M}}{V} = \frac{0.5 \cdot 1.3 \cdot 10^8\ \mathfrak{M}_\odot}{6.2 \cdot 10^4\ \text{пк}^3} \approx 10^3\ \mathfrak{M}_\odot\,.$$

Задача № 31

Во сколько раз могут отличаться отношения видимых угловых размеров Меркурия и Марса для земного наблюдателя? Орбиты считать круговыми.

Решение. Максимальным отношение видимых размеров будет в том случае, когда Меркурий находится ближе всего к Земле (вблизи нижнего соединения), а Марс — дальше всего (вблизи соединения). В таком случае отношение угловых размеров равно

$$k_{\max} = \frac{D_{\text{Me}}/(1 - a_{\text{Me}})}{D_{\text{Ma}}/(1 + a_{\text{Ma}})}.$$

Минимальным данное отношение будет в случае расположения Меркурия в верхнем соединении и Марса — в противостоянии:

$$k_{\min} = \frac{D_{\text{Me}}/(1 + a_{\text{Me}})}{D_{\text{Ma}}/(a_{\text{Ma}} - 1)}.$$

Тогда искомое отношение имеет вид

$$\frac{k_{\max}}{k_{\min}} = \frac{\frac{D_{\mathrm{Me}}/(1-a_{\mathrm{Me}})}{D_{\mathrm{Ma}}/(1+a_{\mathrm{Ma}})}}{\frac{D_{\mathrm{Me}}/(1+a_{\mathrm{Me}})}{D_{\mathrm{Ma}}/(a_{\mathrm{Ma}}-1)}} = \frac{\frac{1+a_{\mathrm{Ma}}}{1-a_{\mathrm{Me}}}}{\frac{a_{\mathrm{Ma}}-1}{1+a_{\mathrm{Me}}}} = \frac{1+a_{\mathrm{Ma}}}{a_{\mathrm{Ma}}-1} \cdot \frac{1+a_{\mathrm{Me}}}{1-a_{\mathrm{Me}}} \approx 11.$$

Задача № 32

В телескоп-рефлектор системы Ньютона (диаметр зеркала 116 мм, фокусное расстояние 1 м) наблюдают полную Луну при равнозрачковом увеличении. Затем телескоп закрывают крышкой с круглым отверстием радиусом 1.5 см, центр которого находится посередине между центром и краем крышки. Опишите, как изменилось изображение Луны, видимое в телескоп.

Решение. Луна — «бесконечно удаленный» объект, от которого приходят параллельные пучки лучей, поэтому фактически у телескопа просто поменялся размер входного отверстия, он стал собирать меньше света в единицу времени. Как следствие, единственное, что поменялось — это видимая яркость Луны. Она уменьшилась в $(116/30)^2 \approx 15$ раз.

Задача № 33

Предполагается, что планетарная туманность объекта Сакураи возникла и начала расширяться 8300 лет назад. Сейчас видимый диаметр туманности равен $44''$. Оцените среднюю скорость расширения туманности, если она находится на расстоянии 5 кпк от Солнца.

Решение. Определим линейные размеры туманности. Один парсек — такое расстояние, с которого 1 а.е. видна под углом $1''$. С расстояния 5 кпк под углом а.е. будет видно расстояние 5000 а.е., следовательно, линейные размеры туманности равны $44 \cdot 5000 = 2.2 \cdot 10^5$ а.е. Если перевести эту величину в км, получим $2.2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^8 = 3.3 \cdot 10^13$ км.

Переведем время расширения в секунды. В одном году примерно $3.1 \cdot 10^7$ с, в 8300 годах $8.3 \cdot 10^3 \cdot 3.1 \cdot 10^7 = 2.6 \cdot 10^{11}$ с.

Средняя скорость расширения за это время равна $3.3 \cdot 10^{13}/(2.6 \cdot 10^{11}) = 1.3 \cdot 10^2$ км/с. В данном случае мы получили скорость удаления противоположных краев. Скорость удаления края туманности от ее центра в 2 раза меньше вычисленного значения. Оба варианта оценивались как верный ответ.

Задача № 34

Спутник движется вокруг Земли в сторону вращения Земли по круговой орбите с радиусом 38400 км. В некий день он пролетел над пунктом 20° с.ш., 15° в.д.

Какую долготу будет иметь пункт на той же широте, над которым спутник пролетит через оборот по орбите?

Решение. Определим период обращения спутника. Радиус его орбиты приблизительно равен 0.1 радиуса орбиты Луны. Тогда определим период спутника, сопоставив параметры его орбиты с параметрами лунной орбиты:

$$\frac{T^2}{T_{\text{л}}^2} = \frac{a^3}{a_{\text{л}}^3} \Longrightarrow T = T_{\text{л}} \cdot 0.1^{3/2} \approx 0.03 T_{\text{л}} \approx 0.8 \text{ сут.}$$

За время орбитального периода спутника Земля повернётся на $0.8 \cdot 360° \approx 290°$. Тогда долгота, над которой пролетит спутник, равна $360° + 15° - 290° = 85°$ в.д.

Более точные вычисления приводят к величине поворота Земли на $\approx$310°, при этом долгота окажется равной 65° в.д. Приближённое решение также оценивалось полным баллом.

Задача № 35

Серпуховский школьник Мокий сделал сэлфи, держа смартфон на горизонтально вытянутой руке строго вертикально. На снимке запечатлелась Луна, касаясь своим краем верха фото. Мокий моментально отправил сэлфи своей подруге Снежане в Лисий Нос с подписью «Луна выше сегодня не поднимется». Снежана тут же увидела фото и захотела сделать точно такое же. Через какое время она сможет его сделать? Какой угол с горизонтом должна составлять рука Снежаны, если ее смартфон точно такой же, как у Мокия, и она тоже держит его перпендикулярно руке? (Координаты Серпухова: 55° с.ш., 37°.5 в.д., координаты Лисьего Носа: 60° с.ш., 30° в.д.)

Решение. Фраза: «Луна выше сегодня не поднимется» означает, что Луна в момент съемки находится в верхней кульминации. Разность высот Луны в кульминации в Серпухове и в Лисьем Носу равна разности широт Серпухова и Лисьего Носа, т.е. 5 градусов. Такой же угол с горизонтом должна составлять рука Снежаны. В Лисьем Носу Луна поднимается на меньший угол, чем в Серпухове, поэтому, чтобы при сэлфи положение Луны на снимке получилась таким же, как у Мокия, Снежана должна держать смартфон выше, т.е. угол ее руки с горизонтом должен составлять $+5°$. Время, требующееся Луне, чтобы дойти до кульминации в Лисьем Носу после кульминации в Серпухове, равно разности долгот этих пунктов, выраженной в единицах времени, т.е. $7°.5/15°$ в час $= 30$ минут.

Задача № 36

В некоторый день звезда Денеб ($\alpha = 20^h41.5^m$) достигла максимальной высоты над горизонтом в $8^h41.5^m$ утра по истинному солнечному времени. На какой минимальной высоте под горизонтом в этот день будет находиться Солнце для наблюдателя в Санкт-Петербурге?

Решение. Звездное и истинное солнечное время совпадают в день осеннего равноденствия. Затем каждый день звездное время обгоняет солнечное на дополнительные 3^m56^s. Таким образом, в день весеннего равноденствия звездное время будет обгонять солнечное на 12 часов. В момент верхней кульминации звездное время равно прямому восхождению, следовательно звездное время в момент верхней кульминации Денеба равно $20^h41.5^m$. Таким образом, действие задачи происходит в день весеннего равноденствия. В эту дату склонение Солнца равно нулю, тогда искомая высота нижней кульминации рассчитывается по формуле:

$$h_{\text{нк}} = \varphi + \delta_{\odot} - 90^\circ = 60^\circ + 0^\circ - 90^\circ = -30^\circ.$$

Задача № 37

В результате наблюдений спиральной галактики, видимой с ребра, оказалось, что спектральная линия, имеющая лабораторную длину волны 6563 Å, наблюдается на длинах волн от 6556 Å до 6570 Å. Оцените максимальную линейную скорость вращения вещества в галактике вокруг ее центра.

Решение. Воспользуемся формулой эффекта Допплера

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Поскольку среднее значение длины волны совпадает с лабораторным значением, в целом галактика имеет нулевую лучевую скорость, а максимальные по модулю отклонения в каждую сторону соответствуют максимальным скоростям, с которыми соответствующий край галактики приближается к наблюдателю или удаляется от него. Тогда $\Delta\lambda = (6570 - 6556)/2 = 7$Å, откуда $v/c \approx 10^{-3}$. Таким образом, искомая скорость составляет примерно $3 \cdot 10^2$ км/с.

Задача № 38

Неправильная переменная звезда в момент времени t_1 имела звездную величину $m_1 = +2^m.0$. В момент t_2 она была на 30% слабее, чем в t_1, а в момент t_3 она была на 30% ярче, чем в t_2. В момент t_3 звезда ярче или слабее, чем в момент t_1? Найдите m_2, m_3 (т.е. звездные величины звезды в моменты t_2 и t_3).

Решение. Изменяться на какое-то число процентов (т.е. в какое-то число раз) могут не звездные величины, а освещенности, так что

$$E_2 = E_1 \cdot (1 - 0.3)$$

и

$$E_3 = E_2 \cdot (1 + 0.3) = E_1 \cdot (1 - 0.3) \cdot (1 + 0.3) = E_1 \cdot (1 - 0.09),$$

откуда следует, что в момент t_3 звезда была слабее, чем в момент t_1.

Поскольку видимая звездная величина звезды $m_i = -2.5 \lg E_i + \text{const}$, то

$$m_2 - m_1 = -2.5 \lg \frac{E_2}{E_1} = -2.5 \cdot \lg 0.7 \approx 0.4,$$

т.е. $m_2 = 2^m.4$. Аналогично

$$m_3 - m_1 = -2.5 \lg \frac{E_3}{E_1} = -2.5 \cdot \lg 0.91 \approx 0.1$$

и $m_3 = 2^m.1$.

Задача № 39

Фотография была сделана 12 декабря 2002 года. Определите звездное и солнечное время в момент съемки с точностью до четверти часа.

Решение. На фотографии виден Ковш Большой Медведицы. Вспомним, что крайние звезды Ковша, Дубхе и Мерак, указывают на Полярную звезду, а значит, лежат на одном круге склонений. Более того, этот круг на фотографии перпендикулярен горизонту, а значит Дубхе и Мерак находятся в кульминации, причем, очевидно, в нижней. Прямое восхождение этих двух звезд с нужной точностью можно считать равным 11 часам (это можно узнать по звездной карте или из справочника), значит, сейчас $11+12 = 23$ часа 00 минут звездного времени.

В день осеннего равноденствия, 23 сентября, звездное и солнечное время совпадают, а затем звездное начинает уходить вперед со скоростью 3 минуты 56 секунд в сутки. Таким образом, к 12 декабря (т.е. через 80 дней) разница между звездным и солнечным временем составит 315 минут, т.е. 5 часов 15 минут. Значит, солнечное время в момент съемки с указанной точностью составляло 17 часов 45 минут.

Задача № 40

Космический аппарат массой 100 кг обращается по круговой орбите радиусом 40 тысяч км. В него врезается осколок космического мусора массой 2 кг. Считая столкновение лобовым и неупругим, а скорость осколка равной 3 км/с и направленной навстречу скорости космического аппарата, оцените расстояние до центра Земли в перигее новой орбиты.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара:

$$MV - mv = (M+m)V_1 \Longrightarrow V_1 = \frac{MV - mv}{M+m}.$$

Здесь M — масса КА, m — масса осколка мусора, V, v — их начальные скорости, соответственно, V_1 — скорость системы после соударения.

Изначально КА двигался по круговой орбите и его скорость была равна

$$V = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} = 3.2 \text{ км/с}.$$

Тогда итоговая скорость равна

$$V_1 = \frac{100 \cdot 3.2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 3 \cdot 10^3}{100 + 2} = 3.1 \text{ км/с}.$$

Определим новое значение большой полуоси орбиты:

$$V_1^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) \Longrightarrow a = \frac{GM_\oplus R}{2GM_\oplus - RV_1^2} = 38 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Точка соударения КА с частицей мусора является апогеем новой орбиты, тогда расстояние в перигее равно

$$r = 2a - R = 36 \text{ тыс. км}.$$

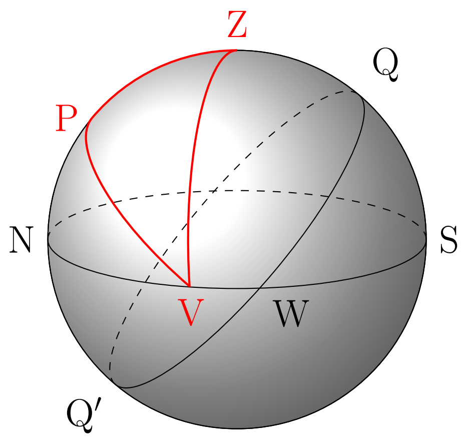
Задача № 41

Насколько раньше или позже по всемирному времени наступит заход Солнца для наблюдателя в Екатеринбурге ($\varphi_E = 56°50', \lambda_E = 60°35'$) по сравнению с наблюдателем в Санкт-Петербурге ($\varphi_C = 59°57'$, $\lambda_C = 30°20'$) 27 июля? Рефракцией, видимыми размерами Солнца и уравнением времени пренебречь.

Решение. Поскольку координаты наблюдателей указаны с точностью до угловой минуты, ответ следует получить достаточно точно (в частности, нельзя ограничиться утверждением, что широты городов близки, поэтому разница составит примерно 2 часа).

Начнем с определения склонения Солнца 27 июля. Для этого можно воспользоваться справочными данными или какой-либо расчетной программой, но можно и вычислить его с достаточной точностью. Если отсчитывать дни от момента летнего солнцестояния, тогда до 27 июля пройдет 36 дней и $\delta_\odot \approx 23°26' \cos\left(\frac{36}{365.25} \cdot 360°\right) = 19°05'$ (тем самым мы ошибемся примерно на $5'$).

Найдем часовой угол точки захода Солнца в обоих городах. Для этого нарисуем небесную сферу и построим параллактический треугольник:



и запишем теорему косинусов для угла при полюсе

$$\cos z_V = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \sin(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\cos t.$$

Упрощая, получаем соотношение между часовым углом точки захода (t), широтой места (φ) и склонением объекта (δ) вида

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

откуда для Санкт-Петербурга и Екатеринбурга следует

$$\cos t_E = -\operatorname{tg}\varphi_E \operatorname{tg}\delta_\odot \Rightarrow t_E = 8^h08^m, \quad \cos t_C = -\operatorname{tg}\varphi_C \operatorname{tg}\delta_\odot \Rightarrow t_C = 8^h27^m.$$

Местное время будет совпадать с истинным солнечным временем, которое отличается от часового угла истинного Солнца на 12 часов:

$$T_{m,E} = t_E + 12^h = 20^h08^m,$$

$$T_{m,C} = t_C + 12^h = 20^h 27^m.$$

Определим время на Гринвиче — всемирное время — в данные моменты. Гринвичское время отличается от местного времени на данном меридиане на величину, равную часовой мере долготы данного меридиана:

$$T_{0,E} = T_{m,E} - 60°35'/15 = 20^h 08^m - 4^h 02^m = 16^h 06^m,$$

$$T_{0,C} = T_{m,C} - 30°20'/15 = 20^h 27^m - 2^h 01^m = 18^h 26^m.$$

Следовательно, заход Солнца в Екатеринбурге наступит раньше, чем в Санкт-Петербурге, на $2^h 20^m$. Заметим, что уравнение времени в один и тот же момент на различных долготах одинаково, так что его учет дал бы одинаковую поправку к времени захода, а интервал между заходами при этом не изменился бы.

Задача № 42

Светимость звезды составляет $6.4 \cdot 10^3$ светимостей Солнца, температура — 4460 K. Представим, что звезду поместили на место Солнца. Между современных орбит каких двух планет располагалась бы поверхность данной звезды?

Решение. По закону Стефана–Больцмана светимость, радиус и температура звезды связаны соотношением $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Сопоставив звезду с Солнцем, получим соотношение

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 R_\odot \approx 1.3 \cdot 10^2 R_\odot.$$

Радиус Солнца равен $7 \cdot 10^5$ км; это значение можно получить из сопоставления видимых угловых размеров Солнца и величины астрономической единицы. Радиус звезды тогда равен $1.3 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 10^5 = 9.1 \cdot 10^7$ км. Переведем это значение в астрономические единицы: $9.1 \cdot 10^7 / 1.5 \cdot 10^8 \approx 0.6$ а.е., что больше радиуса орбиты Меркурия, но меньше радиуса орбиты Венеры.

Задача № 43

Поглощение света атмосферой Земли при наблюдениях в зените составляет $0^m.2$. Оцените, каким будет поглощение при наблюдении на зенитном расстоянии 60°.

Решение. Поскольку атмосфера Земли достаточно тонкая (высота однородной атмосферы составляет примерно 8 км), можно считать, что при зенитном расстоянии 60° свет от объекта проходит через атмосферу расстояние, примерно в $1/\cos 60° = 2$ раза большее, чем в зените. Поскольку при прохождении атмосферы в зените поглощение составляет $0^m.2$, на зенитном расстоянии 60° оно окажется примерно в 2 раза больше, т.е. около $0^m.4$.

Задача № 44

Два спутника обращаются по круговым орбитам над земным экватором так, что один пролетает над другим каждые 10 часов. Каковы их периоды обращения по орбите, если отношение радиусов их орбит равно 4?

Решение. Из условий следует, что синодический период обращения S для одного спутника при наблюдении со второго равен 10 часам. Пусть T_1 и T_2 — периоды обращения спутников на низкой и высокой орбите, тогда

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} \mp \frac{1}{T_2},$$

где случай с «+» соответствует ситуации, когда один из спутников вращается в обратном направлении. Для определения соотношения периодов сопоставим параметры орбит по III закону Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1^{3/2}}{4^{3/2}} = \frac{1}{8}\,.$$

Отсюда в случае, если спутники обращаются вокруг Земли в одном направлении, получаем

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{8T_1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{T_1} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{7}{8}S = 8.75^h.$$

Тогда $T_2 = 8T_1 = 70^h$.

Если же направления обращения противоположные, то

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{8T_1} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{T_1} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{9}{8}S = 11.25^h.$$

Тогда $T_2 = 8T_1 = 90^h$.

Задача № 45

Ведется радиолокация некоторого внешнего астероида, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики. Установлено, что время прохождения радиосигнала до астероида в противостоянии в ξ раз меньше, чем в ближайшей (по времени) к противостоянию квадратуре. Постройте график зависимости интервала времени между противостоянием и квадратурой от параметра ξ.

Решение. Для начала отметим, что поскольку орбита астероида круговая, ретроградной являться не может (все такие орбиты в любом случае сильно вытянуты), и это позволит нам ограничиться рассмотрением только одного случая — когда Земля и астероид вращаются вокруг Солнца в одном направлении.

Запишем уравнение на a — радиус орбиты (здесь и далее все расстояния измеряются в а.е.):

$$\xi(a-1) = \sqrt{a^2-1}$$

Решая его, получаем:

$$a = \frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}$$

Значит, период из III закона Кеплера (измеренный в годах, как и все последующие величины с размерностью времени) вычисляется как

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{\left(\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}\right)^3}$$

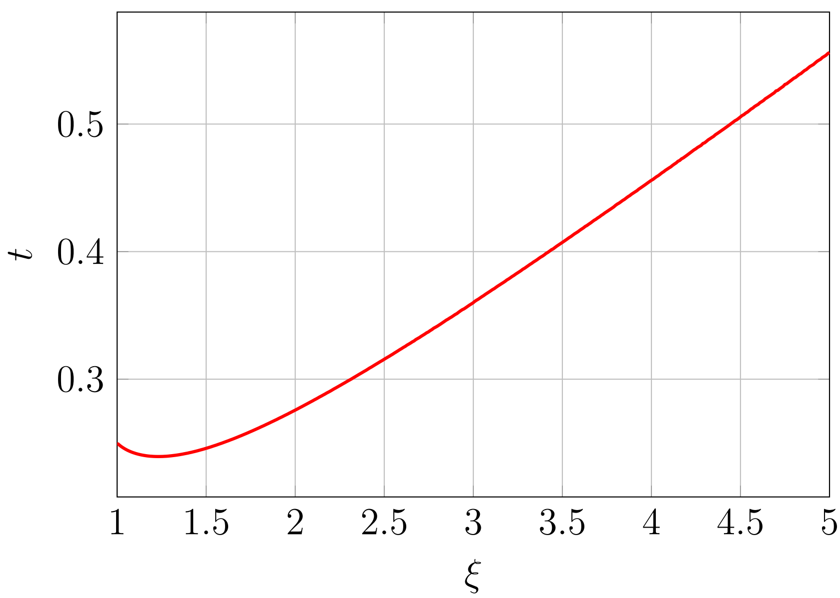
В момент противостояния Земля и астероид находятся в одном и том же направлении от Солнца, после чего Земля движется по орбите с угловой скоростью 2π, а астероид — $2\pi/T$. В момент квадратуры угол между направлениями на Землю и на астероид из Солнца станет равным $\alpha = \arccos(1/a) = \arccos\left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)$, и время t, которое пройдет между противостоянием и квадратурой, можно будет получить из выражения

$$2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{T}\right) t = \alpha.$$

Таким образом, итоговая зависимость выглядит следующим образом:

$$t = \frac{\arccos\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}}{2\pi\left(1 - \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)^{3/2}\right)}.$$

График придется либо построить по точкам, либо воспользоваться каким-нибудь графопостроителем. Результат должен выглядеть примерно так:



Задача № 46

Пассажир поезда видит в правом окне Венеру, а в левом — полную Луну. В каком направлении ехал поезд?

Решение. Венера, поскольку она является внутренней планетой, никогда не удаляется на небе далеко от Солнца. Луна, наоборот, находится в полнолунии тогда, когда направления на нее и на Солнце с Земли противоположны. Раз пассажир видит на небе одновременно объекты, находящиеся в практически противоположных направлениях, то это означает, что и Луна, и Венера находятся близко к горизонту. Следовательно, и Солнце находится где-то рядом с горизонтом, причем направо по ходу поезда. Это означает, что либо недавно случился закат, либо через небольшое время будет рассвет. Они происходят примерно на западе и и на востоке соответственно, а это означает, что поезд ехал либо на юг (если описанная ситуация происходит вечером), либо на север (если утром).

Заметим, что точность определения направления сильно ухудшается по мере приближения к полярным кругам. В приполярных областях Земли Солнце может оказаться у горизонта практически в любом направлении, как следствие, для в этом случае указать направление движения поезда нельзя. Правда, такие железные дороги встречаются очень редко и только в России и Скандинавии.

Задача № 47

Ранним новогодним утром 1 января 2019 года космический аппарат «Новые горизонты» пролетел мимо объекта (486958) 2014 MU_{69} из пояса Койпера, более известного как «Ультима Туле», и сфотографировал его. Оцените время, прошедшее между началом отправки фотографии «Новыми горизонтами» и началом приема данных на Земле, если «Ультима Туле» в момент пролета аппарата находился на расстоянии 43 астрономических единицы от Солнца?

Решение. «Ультима Туле» находится в 43 раза дальше от Солнца, чем Земля. Мы точно не знаем, как именно расположен «Ультима Туле» относительно Земли и Солнца, но в любом случае расстояние от астероида до Земли находится в пределах от 42 а.е. до 44 а.е., что мало влияет на ответ. Сигнал от аппарата распространяется со скоростью света. Далее можно вспомнить, что свет проходит расстояние от Солнца до Земли примерно за 8 минут (если точнее, за 8 минут 20 секунд, или 500 секунд. Это же число можно получить, зная, что скорость света равна 300 тыс. км/с, а одна астрономическая единица равна 150 млн км.) Таким образом, расстояние в 43 а.е. сигнал пройдет за $500 \cdot 43 = 21500$ секунд или около 6 часов.

Задача № 48

Известно, что длина экватора Нептуна примерно в 4 раза длиннее земного экватора. Также известно, что объем Сатурна в 14 раз больше объема Нептуна. Во сколько раз земной экватор длиннее или короче, чем экватор Сатурна?

Решение. Длина экватора прямо пропорциональна радиусу планеты, значит, радиус Нептуна в 4 раза больше, чем радиус Земли: $R_{\text{Нептуна}} = 4R_{\text{Земли}}$. Будем считать все планеты шарами, тогда объем V любой планеты рассчитывается по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус планеты. Коэффициенты перед кубом радиуса значения для данной задачи не имеют, т.к. они сократятся, когда мы запишем соотношение объемов:

$$\frac{V_{\text{Сатурна}}}{V_{\text{Нептуна}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{Сатурна}}}{\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{Нептуна}}} = \frac{R^3_{\text{Сатурна}}}{R^3_{\text{Нептуна}}} = \left(\frac{R_{\text{Сатурна}}}{R_{\text{Нептуна}}}\right)^3 = 14.$$

Теперь подставим вместо радиуса Нептуна его выражение через радиус Земли и придем к нужному ответу:

$$\left(\frac{R_{\text{Сатурна}}}{R_{\text{Нептуна}}}\right)^3 = \left(\frac{R_{\text{Сатурна}}}{4R_{\text{Земли}}}\right)^3 = 14 \Rightarrow \frac{R_{\text{Сатурна}}}{R_{\text{Земли}}} = 4\sqrt[3]{14}.$$

В принципе, это уже ответ задачи, но все-таки необходимо вычислить полученное математическое выражение.

Взять кубический корень из числа 14 — это значит найти такое число, которое при возведении в куб даст 14. Его можно найти без калькулятора, например, методом половинного деления. Очевидно, что искомое число лежит в диапазоне от 2 до 3. Возьмем число посередине этого участка: 2.5. Возведем его в куб: получится $2.5^3 = 15.625$. Это больше числа 14, значит искомый ответ лежит между 2 и 2.5. Далее снова делим промежуток пополам (2.25), возводим в куб (11.39) и делаем соответствующий вывод (искомое число находится в промежутке от 2.25 до 2.5). Так можно продолжать, пока не достигнута нужная точность. В принципе, достаточно получить ответ с точностью до одного знака после запятой: $\sqrt[3]{14} \approx 2.4$.

Таким образом, ответ задачи таков: $R_{\text{Сатурна}} \approx 4 \cdot 2.4 \cdot R_{\text{Земли}} = 9.6R_{\text{Земли}}$

Задача № 49

3 февраля 1488 года португальский моряк Бартоломеу Диаш первым из европейцев открыл мыс Доброй Надежды. В какой день недели это случилось?

Решение. Григорианский календарь появился только в 1582 году, так что для счета проще пользоваться юлианским календарем. Он, как известно, отстает сейчас от григорианского на 13 суток, поэтому 3 февраля 2019 года по юлианскому календарю случится через 13 дней после даты проведения теоретического тура и, естественно, будет субботой (поскольку мы знаем, что тур проходит в воскресенье).

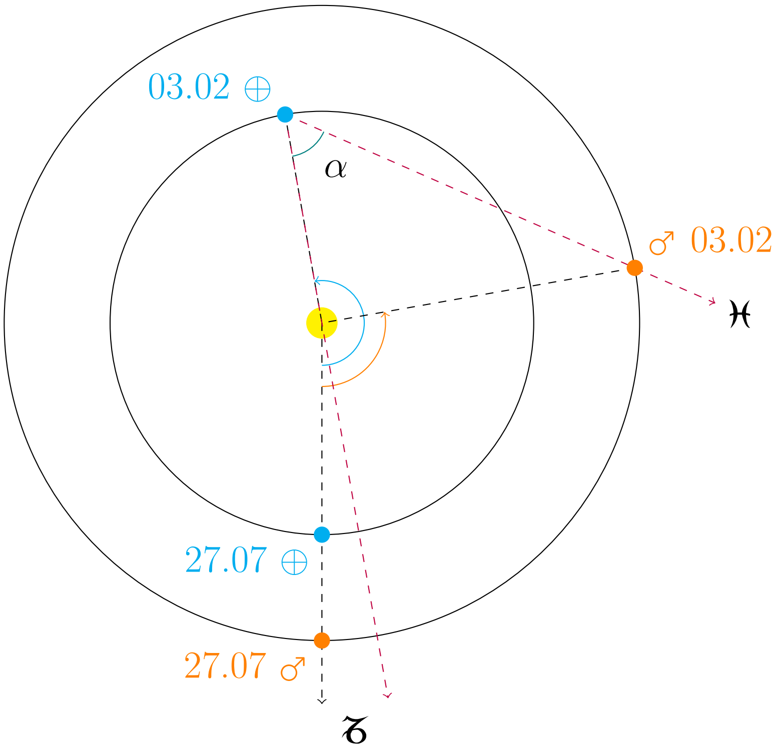
Поскольку каждые четыре года в юлианском календаре год длиннее обычного на один день, а дней недели семь, то календарь на очередной год полностью повторяется каждые $4 \times 7 = 28$ лет. Между интересующими нас датами прошел 531 год, и несложно обнаружить, что 532 делится на 28 нацело. Это означает, что календарь 1487 года является точной копией юлианского календаря 2019 года. Поскольку 1487 год високосным не был, по сравнению с ним все даты января и февраля 1488 года сдвинуты на один день недели вперед (поскольку деление 365 на 7 дает в остатке 1). Следовательно, открытие произошло в следующий после субботы день недели, т.е. в воскресенье.

Задача № 50

27 июля 2018 года произошло уникальное астрономическое событие: великое противостояние Марса произошло одновременно с полным центральным затмением Луны, которое к тому же стало самым продолжительным лунным затмением в XXI веке. В какой фазе и в каком созвездии можно наблюдать Луну сегодня, в день теоретического тура? В каком созвездии и в какое время суток можно наблюдать Марс сегодня, в день теоретического тура? Период обращения Марса вокруг Солнца 1.9 земного года.

Решение. И Луна во время лунного затмения, и Марс в момент противостояния находятся в противоположной Солнцу точке небесной сферы. Поэтому, раз указанные явления произошли 27 июля, когда Солнце было в Раке, то Луна и Марс были в Козероге. С 27 июля по 3 февраля прошел 191 день, или чуть более полугода. Теперь в Козероге находится Солнце. Давайте разберемся, где находятся Луна и Марс.

Синодический период Луны (т.е. период смены фаз) составляет 29.5 дней. Таким образом, 191 день – это 6 полных синодических периодов Луны и еще 14 дней, т.е. всего прошло чуть менее 6.5 периода. Значит, Луне осталось около суток до новолуния, и она находится чуть западнее Солнца – либо также в Козероге, либо в Стрельце (на самом деле Луна перешла из созвездия Стрельца в созвездие Козерога примерно через час после окончания теоретического тура в Петербурге).



Для того, чтобы ответить на вопрос о Марсе, придется нарисовать рисунок. Земля проходит полный круг в 360° за 365 дней, т.е. смещается примерно на 1° в день. Таким образом, ко дню теоретического тура она пройдет дугу примерно в 190° (вычисления с большей точностью нам не понадобятся). Период обращения Марса вокруг Солнца в 1.9 раз больше, соответственно, за то же время он пройдет дугу в 1.9 раз меньше, т.е. около 100°. Таким образом, мы получили, что угол «Земля – Солнце – Марс» в день тура составляет $190° - 100° = 90°$, т.е. треугольник из этих двух планет и Солнца является прямоугольным. По рисунку видно, что при этом Марс при наблюдении с Земли оказывается к востоку от Солнца. Нас интересует величина угла «Солнце – Земля – Марс» (на рисунке обозначен как α).Чтобы его оценить, можно, например, нарисовать в масштабе прямоугольный треугольник с катетами, которые соотносятся как 1:1.5 (что соответствует радиусу орбиты Земли в 1 а.е. и радиусу орбиты Марса в 1.5 а.е.) и измерить нужный угол. Он оказывается равным примерно $55° - 60°$, что соответствуют смещению на восток примерно на два зодиакальных созвездия от Солнца, которое, как мы уже выяснили, находится в Козероге. Таким образом, итоговый ответ: Марс находится в Рыбах, и виден вечером после захода Солнца.

Задача № 51

В середине ноября радиант метеорного потока находился выше всего над горизонтом в предрассветные часы. Какой это мог быть поток — Леониды или Эта-Аквариды? Почему?

Решение. Радиант потока Леониды находится в созвездии Льва, а потока Эта-Аквариды — в созвездии Водолея. В середине ноября Солнце находится в созвездии Весов. Созвездие Льва восходит раньше, созвездие Водолея — позже. Значит, перед рассветом можно было наблюдать Леониды.

Задача № 52

Правитель маленького, но гордого королевства, не разобравшись с устройством современного календаря, повелел с 1 января 2019 года жить по календарю, в котором год длится ровно 360 дней. В каком году по принятому в России календарю 1 января снова совпадет с 1 января по королевскому календарю?

Решение. Начнем с приближенной оценки. В принятом в России григорианском календаре год практически до конца этого века продолжается в среднем на $5\frac{1}{4}$ суток больше, чем в календаре королевства. Ситуация немного поменяется в 2100 году — он в григорианском календаре високосным не является. Однако $365.25/5.25 \approx 69.6$, и это означает, что «королевский» счет лет обгонит общепринятый на целый год где-то примерно в $2019 + 70 = 2089$ году.

Казалось бы, это и есть итоговый ответ (который, возможно, стоит лишь немного уточнить), но на самом деле это не так. Нам нужно добиться не только обгона на год, но и совпадения дат 1 января в двух календарях, а это условие при накоплении разницы в год совсем не обязательно окажется выполненным. В самом деле, из условия задачи следует, что 1 января 2020 года по «королевскому» календарю наступит раньше на 5 дней. Следующий сдвиг составит уже 6 дней (2020 год — високосный), после чего еще два раза будет происходить сдвиг на 5 дней, а затем ситуация начнет повторяться. Таким образом, за каждые 4 года будет накапливаться сдвиг на 21 день. За $17 = 68$ лет (к 2087 году) накопится разница в $17 = 357$ дней (и «королевский» календарь будет отставать от григорианского на 8 дней), поэтому в 2088 году она составит 362 дня, а в 2089 — уже 368 дней, т.е. на 2 дня больше, чем нужно.

Таким образом, за 70 лет календари почти сойдутся, но «королевский» будет опережать григорианский на 2 дня, а в 2090 году опережение составит уже 7 дней. Если после этого снова отсчитать 68-летний цикл, то отставание, казалось бы, должно составлять 1 день, но за это время успеет случиться 2100 год, который не является високосным в григорианском календаре, поэтому отставание составит 2 дня (и произойдет это в 2158 году). Следующий 68-летний цикл добавит еще 9 суток отставания (8 из-за цикла и 1 — из-за невисокосного в григорианском календаре 2200 года), и в 2226 году «королевский» календарь будет отставать в сумме на 11 суток. Однако годом раньше отставание составит 6 суток $(11 - 5)$, а еще годом раньше будет високосный 2224 год, который как раз и обеспечивает отставание на 6 суток. Итого в 2225 году начала года совпадут, это и будет ответом.

Задача № 53

Два астронома в Петербурге и в некоторой обсерватории наблюдают Вегу. Высота верхней кульминации звезды в двух пунктах отличается на 3°, при этом в обсерватории Вега поднимается на бóльшую высоту к югу от зенита. Известно, что в обсерватории Вега достигает наибольшей высоты над горизонтом на 1 час 58 минут раньше, чем в Петербурге. Определите координаты обсерватории и оцените расстояние между Петербургом и обсерваторией.

Решение. Первое, что нужно сделать — вспомнить координаты Петербурга: 60° северной широты и 30° восточной долготы. Теперь получим координаты обсерватории.

В обсерватории, по условию, верхняя кульминация происходит к югу от зенита. Этому условию в северном полушарии удовлетворяют звезды, склонение которых не превосходит широты места наблюдения, тогда $90^\circ - \varphi + \delta \leqslant 90^\circ$. Склонение Веги меньше 60°, поэтому и в Петербурге звезда кульминирует к югу от зенита. Запишем соотношения для верхних кульминаций:

$$h_{\text{ВК, СПб}} = 90^\circ - \varphi_{\text{СПб}} + \delta, \quad h_{\text{ВК, К}} = 90^\circ - \varphi_{\text{К}} + \delta.$$

Разность высот кульминаций соответствует разности широт пунктов наблюдения:

$$h_{\text{ВК, К}} - h_{\text{ВК, СПб}} = \varphi_{\text{СПб}} - \varphi_{\text{К}} = 3^\circ \implies \varphi_{\text{К}} = \varphi_{\text{СПб}} - 3^\circ = 60^\circ - 3^\circ = 57^\circ.$$

Тот же вывод можно получить, если вспомнить утверждение о том, что высота полюса мира над горизонтом равна широте места наблюдения. Поскольку все звездное небо при смене широты места наблюдения «поворачивается» как целое, разница в высотах кульминаций должна соответствовать разнице широт. Поскольку Вега находится достаточно далеко от полюса мира, она должна подниматься на большую высоту в более южных широтах, и это означает, что широта обсерватории составляет 57° северной широты.

Разность долгот соответствует разности времени наблюдения. В часовой мере разность долгот равна 1^h58^m, что в градусной мере равно $\frac{1^h58^m}{24^h} \cdot 360^\circ = 29.5^\circ$. Так как в обсерватории наблюдения проводятся раньше, то ее долгота больше долготы Петербурга и составляет $30^\circ + 29.5^\circ = 59.5^\circ$.

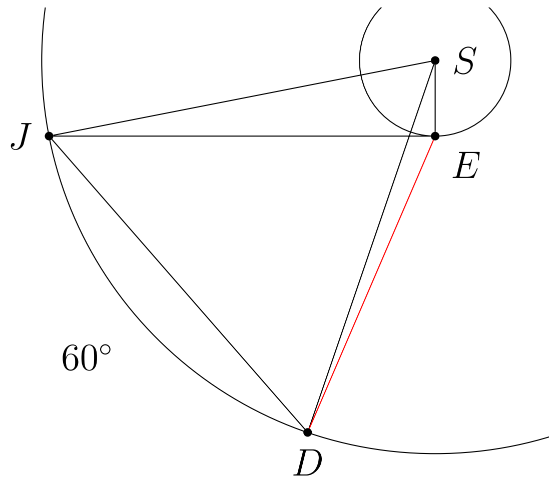
Теперь определим расстояние между пунктами наблюдения. По широте угловое расстояние составляет 3°, по долготе — 29.5°, почти в 10 раз больше. Для оценки можно считать, что расстояние определяется разностью долгот. Поскольку широты пунктов приблизительно равны 60°, то длина географической параллели составляет половину длины экватора, то есть $2 \cdot 10^4$ км. Тогда расстояние вдоль параллели между пунктами равно $29.5 : 360 \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 1640$ км.

Наконец, отметим, что указанная в условии обсерватория действительно существует — это Коуровская обсерватория на Урале.

Задача № 54

Во время радиолокации астероида Диомед Юпитер находился в восточной квадратуре. Сколько времени длился единичный сеанс радиолокации? Известно, что Диомед движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Юпитер, но обгоняет его на $1/6$ периода.

Решение. Астероид Диомед является представителем так называемых «троянских» астероидов, которые находятся в точках Лагранжа L_4 и L_5. Конкретно Диомед расположен в L_4, и именно поэтому он опережает Юпитер на $60°$ по орбите. Теперь необходимо нарисовать правильную схему расположения небесных тел: угол Солнце S – Земля E – Юпитер J составляет $90°$; дуга J – астероид D составляет $60°$; и наша задача — найти расстояние ED и перевести его во время путешествия радиосигнала. Заметим, что треугольник SJD таким образом получится равносторонним (две вершины равноудалены от третьей, а угол между ними равен $60°$). В рамках данного решения мы будем использовать значение радиуса орбиты Юпитера, равное 5.2 а.е., но участникам не возбраняется использовать приближенное значение 5 а.е. Также будем считать, что все объекты находятся в плоскости эклиптики и движутся по круговым траекториям.



Если аккуратно нарисовать положение небесных тел в масштабе, то искомое расстояние можно измерить линейкой, и это будет верным ответом. Тем не менее, приведем аналитическое решение задачи.

Можно вычислить угол $\angle EJD = 60° - \arcsin 1/5.2 \approx 48°$, а затем применить теорему косинусов к треугольнику EJD, из которой найти необходимую сторону ED. Однако ее можно найти и не зная тригонометрии.

Заметим, что площадь треугольника SED и двух составляющих его треугольников невелика, и поэтому можно сказать, что

$$S_{EJD} \approx S_{SJD} - S_{SJE}.$$

Также заметим, что высоты, опущенные из угла J на основания SD и ED почти что равны в треугольниках SJD и EJD соответственно. Площадь прямоугольного треугольника SJE можно вычислить как $S_{SJE} = \frac{1}{2} \cdot 5.1 \cdot 1$ (сторона JE вычисляется по теореме Пифагора, все стороны подставляем в а.е.). Высота в равностороннем треугольнике SJD вычисляется как $5.2\sqrt{3}/2$, а его площадь $S_{SJD} = 5.2^2\sqrt{3}/4$.

Запишем соотношение площадей, но уже в числах:

$$\frac{1}{2} \cdot ED \cdot \frac{5.2\sqrt{3}}{2} \approx \frac{5.2^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot 5.2 \cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad ED = 5.2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 4 \text{ а.е.}$$

Итак, тем или иным способом мы нашли, что радиосигналу требуется пройти 4 а.е. до астероида и столько же обратно. Т.к. на прохождение 1 а.е. свету требуется 8 минут, то на весь путь свет затратит 64 минуты.

Задача № 55

27 июля 2018 года произошло уникальное астрономическое событие: великое противостояние Марса произошло одновременно с полным центральным затмением Луны. При этом во время максимальной фазы затмения Марс был на 2 звездных величины ярче Луны. Оцените, во сколько раз одна квадратная секунда видимого диска Марса была ярче одной квадратной секунды диска Луны. Известно, что разница на одну звездную величину означает, что объект ярче в ≈ 2.5 раза. Радиус Марса в два раза меньше радиуса Земли, радиус орбиты Марса составляет 1.5 а.е.

Решение. Из условия следует, что весь Марс был ярче всей Луны в $2.5^2 \approx 6.3$ раза. Для того, чтобы выяснить, как соотносились яркости с одной квадратной секунды (такую величину принято называть «поверхностной яркостью»), нам надо найти отношение видимых размеров дисков Марса и Луны.

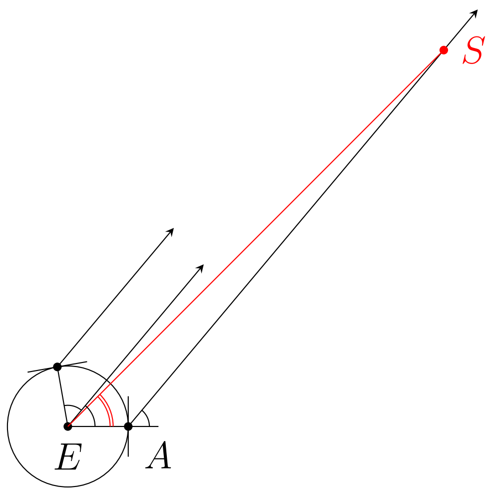
Поскольку радиус Луны примерно в 4 раза меньше радиуса Земли, то радиус Марса примерно в 2 раза больше радиуса Луны. Зная или вычисляя расстояние до Луны от Земли в астрономических единицах ($\approx 1/400$ а.е.), делаем вывод, что в описанной ситуации Марс будет примерно в 200 раз дальше от Земли, чем Луна (на самом деле это завышенная оценка — орбита Марса не является окружностью, однако, поскольку в условии дан радиус орбиты, этим можно пренебречь). Следовательно, угловой диаметр Марса на небе будет в 100 раз меньше углового диаметра Луны, а угловая площадь — в $100^2 = 10^4$ раз меньше. Следовательно, каждая квадратная секунда видимого диска Марса была ярче квадратной секунды диска Луны в $\approx 6 \cdot 10^4$ раз.

Возможно, кто-либо из участников сразу вспомнит угловой размер диска Марса во время великого противостояния. Это позволяет получить более точную оценку. Марс при этом будет ближе к Земле, как следствие, будет иметь большие угловые размеры, а это приведет к тому, что ответ уменьшится примерно в полтора-два раза.

Задача № 56

Илон Маск мечтает сделать интернет доступным для всех. Для этого он планирует запустить множество спутников на орбиты с одинаковой высотой. Рассчитайте период обращения одного спутника и их минимальное количество, если по техническому заданию устойчивый прием возможен в случае, когда спутник находится на высоте не менее 40° над горизонтом.

Решение. Раз требуется найти минимальное количество спутников, то их лучше запустить на как можно более высокую орбиту, тогда каждый из них будет охватывать максимально возможную площадь поверхности Земли. Рассмотрим предельный случай, т.е. найдем такие две точки на поверхности Земли, для которых спутник, удаленный на бесконечность, виден на высоте 40° над горизонтом (направление на бесконечность указано стрелками):



Получается, что эти точки разнесены по поверхности Земли на угол в 100° (два угла по 50°, выделенные черными дугами). В виду того, что эта величина не является делителем 360° (чтобы на орбите располагалось целое число спутников), то спутник можно опустить до такой высоты, чтобы две крайние точки были разнесены на угол в 90° (т.е. $\angle AES = 45^\circ$, выделен красным), тем самым мы расположим 4 спутника на круговой орбите. Но при таком расположении на Земле останутся две приполярных области, не видимые спутникам, для их покрытия необходимы еще два спутника, поэтому кажется, что достаточно 6 спутников (например, если расположить два спутника на геостационарной и четыре — на геосинхронной полярной орбите).

Рассчитаем высоту орбиты отдельного спутника. Если построить треугольник с вершинами в центре Земли E, крайней точке точке наблюдения A и спутнике S, то угол $\angle ESA = 5^\circ$. Применим теорему синусов к этому треугольнику ($r = ES$ — радиус орбиты, выделен красным):

$$\frac{EA}{\sin ESA} = \frac{ES}{\sin EAS} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_\oplus}{\sin 5^\circ} = \frac{r}{\sin 130^\circ}$$

$$R_\oplus \sin 50^\circ = r \sin 5^\circ$$

$$r = R_\oplus \frac{\sin 45^\circ \cos 5^\circ + \cos 45^\circ \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ} = R_\oplus \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx$$

$$\approx R_\oplus \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{57.3^\circ}{5^\circ} + 1 \right) \approx R_\oplus \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (11.5 + 1) \approx 8.8 R_\oplus$$

Полученный результат оказывается больше радиуса орбиты геостационарного спутника (42 тыс. км), то есть спутники не могут «висеть» одной точкой. Рассчитаем период обращения T одного такого спутника по третьему закону Кеплера, сравнив спутник с Луной:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} = \frac{T_☾^2}{a_☾^3}$$

$$T = T_☾ \sqrt{\left(\frac{r}{a_☾} \right)^3} = 27.3 \text{ сут.} \cdot \sqrt{\left(\frac{8.8 R_\oplus}{60 R_\oplus} \right)^3} \approx 1.5 \text{ сут.}$$

Таким образом, спутники следует расположить на двух перпендикулярных орбитах с указанным радиусом, и всего их окажется 8 штук. С учетом того, что площади покрытия спутников будут перекрываться, то, несмотря на две точки пересечения орбит, их можно расположить так, чтобы они не сталкивались.

Примечание: разумеется, главным ограничением для спутников и приемников является мощность передаваемого сигнала, поэтому спутники должны быть существенно ниже (сам Маск планирует их расположить на орбитах с высотой около 1000 км), и поэтому должно быть существенно больше (около 150 штук).

Задача № 57

Полярник, встречавший восход Солнца в 2018 году на северном полюсе Земли, обнаружил, что верхняя точка диска Солнца впервые появилась на горизонте в некотором направлении. Будет это направление тем же или нет в 2019 году? Если нет — чему будет равен угол между этими направлениями и в какую сторону от направления 2018 года его надо будет отсчитывать? Изменением атмосферной рефракции из-за смены погодных условий пренебречь.

Решение. На полюсе горизонт совпадает с небесным экватором, поэтому время между двумя последовательными восходами верхней точки диска Солнца будет совпадать с временем между двумя последовательными «однотипными» моментами пересечения Солнцем экватора — т.е. прохождением точки весеннего равноденствия. Этот интервал времени называется тропическим годом и составляет, как известно, примерно 365.25 (точнее 365.2422...) солнечных суток.

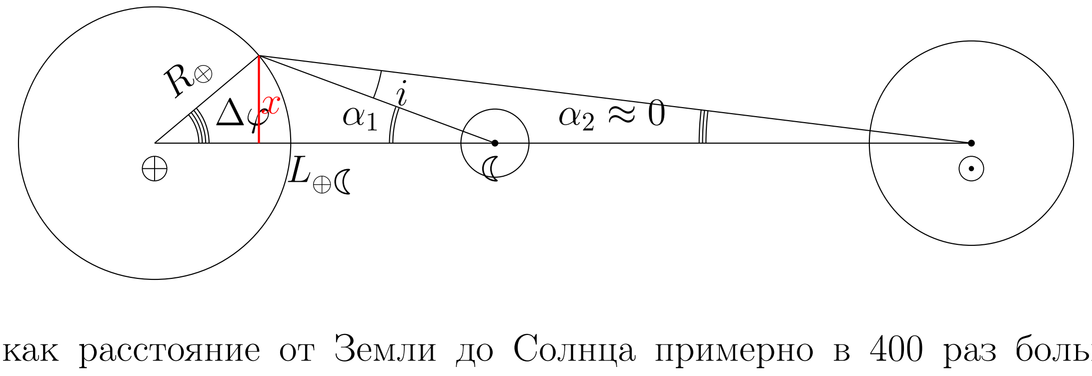
Поскольку солнечные сутки — это период суточного движения Солнца на небе для наблюдателя, получаем, что Солнце успеет совершить за тропический год какое-то количество полных оборотов и еще примерно четверть оборота, следовательно, появится над горизонтом примерно на 90° (точнее на 87°) западнее (или — для полярника — правее) исходной точки.

Заметим, что средняя атмосферная рефракция на этот результат практически не влияет: поскольку она поднимает диск Солнца над горизонтом в среднем на один и тот же угол, оба восхода наступят раньше по времени, но угол между ними практически не изменится. Изменения могли бы появиться при существенной разнице в углах рефракции в интересующие нас два момента, однако это обстоятельство по условию мы не учитываем.

Задача № 58

Затмение Агафокла — одно из самых известных античных затмений — произошло 15 августа 310 года до н.э. Это затмение было полным на Геллеспонте (сейчас этот пролив называется Дарданеллы, 40° с.ш., 30° в.д.), где его наблюдал Калипп. Известно, что Аристил с Тимохарисом наблюдали это затмение в Александрии (30° с.ш., 30° в.д.), причем они видели, что тень Луны двигалась перпендикулярно меридиану. Оцените максимальную фазу затмения в Александрии.

Решение. Из условия видно, что оба пункта наблюдения располагаются на одном меридиане. Так как тень Луны двигалась перпендикулярно меридиану, то максимальные фазы затмения в обоих пунктах наступили одновременно и можно рассматривать мгновенные положения светил для наблюдателей в момент максимальной фазы затмения. Можно считать, что в том пункте, где затмение было полным, луч зрения наблюдателя проходит через центры дисков как Луны, так и Солнца. В том пункте, где затмение частное, центры дисков Луны и Солнца отстоят друг от друга на некоторый угол i. Оценим этот угол, нарисовав рисунок. Для наглядности будем считать, что на Геллеспонте Солнце и Луна находились в зените. Конечно, это не так, но поправка будет очень мала, а задача, по условию, оценочная.



Так как расстояние от Земли до Солнца примерно в 400 раз больше, чем расстояние до Луны, то можно считать, что $\alpha_2 \approx 0$, и, следовательно, $i \approx \alpha_1$. Из рисунка также очевидно, что угол α_1 равен угловому размеру красного отрезка x при наблюдении с Луны. При этом расстоянием, с которого проводятся наблюдения, можно считать как расстояние от центра Земли до центра Луны $L_{\oplus☾}$, так и расстояние от поверхности Земли до центра Луны, т.е. $L_{\oplus☾} - R_\oplus$, оценка при этом изменится незначительно. В свою очередь $x = R_\oplus \sin\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 10^\circ$. Так как все углы малы (даже $\Delta\varphi$), их синусы можно заменить на величины углов, выраженные в радианах. Суммируя все вышеизложенное, получаем

$$i \approx \alpha_1 \approx \frac{x}{L_{\oplus☾}} \approx \frac{R_\oplus \Delta\varphi}{L_{\oplus☾}}.$$

Подставляя числа, получаем $i \approx 3 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 0^\circ.17$.

Это означает, что центр диска Луны смещается по отношению к центру диска Солнца на $0^\circ.17$. Значит, Луной будет закрыто $0^\circ.5 - 0^\circ.17 = 0.^\circ 33$ или $0.33/0.5 \approx 0.7$ диаметра Солнца, т.е. фаза затмения в Александрии была примерно 70%.

Убедиться в том, что эти весьма приближенные расчеты очень близки к действительности, можно вот по этой ссылке:

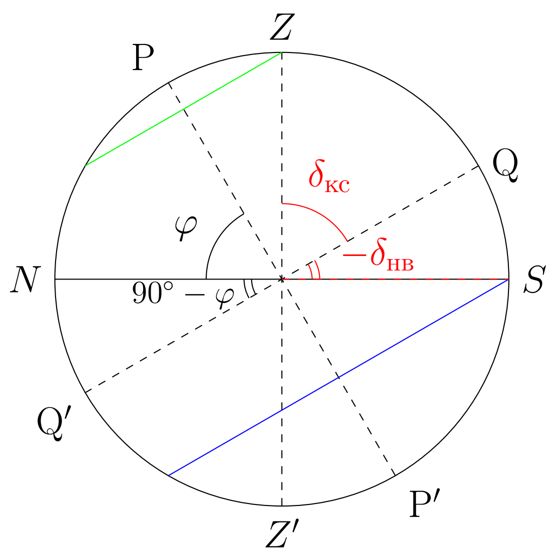
https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEsearch/SEsearchmap.php?Ecl=-03090815

Осталось решить самый загадочный вопрос задачи: если затмение наблюдали Калипп, Аристил и Тимохарис, то почему оно «затмение Агафокла» и кто он, собственно, такой? Агафокл — это тиран Сиракуз. Затмение по традиции называется его именем, поскольку оно произошло в начале похода сиракузцев под началом Агафокла в Ливию (и оказало определенное моральное воздействие на войско). Исторические записи (например, Диодора Сицилийского) об этом астрономическом событии позволили историкам уточнить дату начала похода.

Задача № 59

Оцените, какая часть звезд, хотя бы иногда оказывающихся над горизонтом в Петербурге, всегда оказывается в верхней кульминации к северу от зенита.

Решение. Нарисуем картинку, изображающую небесную сферу в проекции на плоскость небесного меридиана:



Поскольку широта Петербурга $\varphi = 60^\circ$, получается, что хотя бы когда-нибудь над горизонтом появляются звезды, склонение которых $\delta > \delta_{\text{нв}} = -30^\circ$, а к северу от зенита кульминируют звезды со склонением $\delta > \delta_{\text{кс}} = 60^\circ$. Поскольку звезды расположены на небе примерно равномерно, нам требуется оценить отношение площади верхней «шапочки» сферы к площади сферы без нижней части (отделенной синей линией).

Дальше можно действовать двумя путями. Во-первых, можно воспользоваться формулой площади поверхности сферы, заключенной между двумя кругами равных склонений (если она известна). Для единичной сферы это

$$S = 2\pi|\sin\delta_1 - \sin\delta_2|.$$

Тогда искомое отношение составляет

$$\frac{2\pi|\sin 90^\circ - \sin 60^\circ|}{2\pi|\sin 90^\circ - \sin(-30^\circ)|} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + 1/2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \approx 0.1.$$

Во-вторых, можно оценить искомые площади приближенно. «Шапочка», соответствующая звездам, кульминирующим к северу от зенита, не слишком сильно отличается от круга с радиусом 1/2 (для единичной сферы), поэтому ее площадь примерно равна $\pi/4$. Аналогичное рассуждение позволяет оценить площадь области, в которой находятся невосходящие звезды, она оказывается равной примерно π. Тогда, поскольку общая площадь единичной сферы равна 4π, искомое отношение можно оценить как

$$\frac{\pi/4}{4\pi - \pi} = \frac{1}{12} \approx 0.08.$$

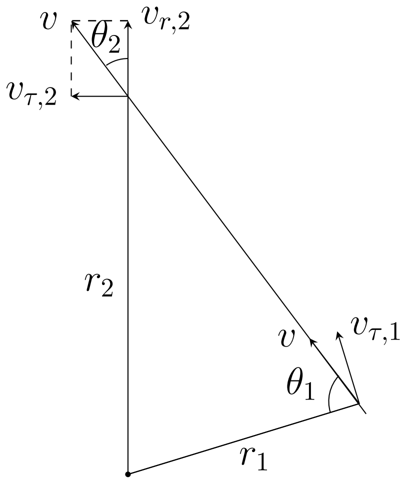
Можно предложить и другие варианты приближенных оценок площади (например, оценить площадь области невосходящих звезд как площадь половины сферы за вычетом площади «пояса» между экватором и параллелью 30°, вычисленной как площадь трапеции), но все они дадут близкие результаты — около 9%.

Задача № 60

Некоторая звезда обладает видимой звездной величиной 7^m и ненулевым собственным движением. Какова будет ее видимая звездная величина в тот момент, когда собственное движение звезды уменьшится в 4 раза? Полная скорость звезды остается постоянной.

Решение. Разность звездных величин в данном случае определяется различием расстояний:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{r_1^2}{r_2^2} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$



Собственное движение связано с тангенциальной компонентой скорости и расстоянием как

$$v_\tau \text{ [км/с]} = 4.74 \cdot \mu \text{ [}''\text{/г]} \cdot r \text{ [пк]}.$$

Пусть θ_1, θ_2 — углы между вектором полной скорости звезды и лучами зрения, тогда

$$v_{\tau,1} = v\sin\theta_1, \quad v_{\tau,2} = v\sin\theta_2 \implies v\sin\theta_{1,2} = 4.74\mu_{1,2}r_{1,2} \implies \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{r_1}{r_2}.$$

По теореме синусов для текущего положения звезды и момента, когда собственное движение уменьшится в 4 раза,

$$\frac{\sin\theta_1}{r_2} = \frac{\sin\theta_2}{r_1} \implies \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляем выражение для отношения синусов в формулу для собственных движений:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{r_1}{r_2} \implies \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Отсюда разность звездных величин

$$m_1 - m_2 = 5\lg\frac{1}{2} = -5\lg 2 = -1.5 \implies m_2 = 7^m + 1.5^m = 8.5^m.$$

Задача № 61

В момент каждого противостояния астероида земной наблюдатель измеряет его видимую звездную величину. Период обращения астероида равен 3.9 года. Оцените эксцентриситет его орбиты, если амплитуда изменения видимой звездной величины составляет 2.5^m. Орбиту Земли считаем круговой.

Решение. Из третьего закона Кеплера в применении к Солнечной системе оценим большую полуось орбиты астероида. Воспользуемся системой единиц измерения, в которой будем выражать расстояния в астрономических единицах, а время — в годах, тогда $T^2 = a^3$, $a = T^{2/3} = \sqrt[3]{15.21} \approx 2.5$ а.е.

По формуле Погсона оценим, во сколько раз меняется освещенность, создаваемая астероидом для наблюдателя на Земле:

$$\Delta m = 2.5 \lg \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \Rightarrow \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = 10.$$

Освещенность в данном случае зависит не только от расстояния астероида от Солнца, но и от расстояния между наблюдателем и астероидом. Пусть e — эксцентриситет орбиты астероида, R — его радиус. Тогда освещенности, создаваемые астероидом в перигелии и афелии орбиты для земного наблюдателя, равны

$$E_\pi = \frac{L_\odot}{4\pi(a\cdot(1-e))^2}\pi R^2 \frac{1}{2\pi\big(a(1-e)-a_\oplus\big)^2},$$
$$E_\alpha = \frac{L_\odot}{4\pi(a\cdot(1+e))^2}\pi R^2 \frac{1}{2\pi\big(a(1+e)-a_\oplus\big)^2}.$$

Отношение освещенностей равно

$$\frac{E_\pi}{E_\alpha} = \frac{(a\cdot(1+e))^2}{(a\cdot(1-e))^2}\cdot\frac{\big(a(1+e)-a_\oplus\big)^2}{\big(a(1-e)-a_\oplus\big)^2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{a(1+e)-a_\oplus}{a(1-e)-a_\oplus}\right)^2.$$

При выражении расстояний в астрономических единицах $a_\oplus = 1$, тогда

$$\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{a(1+e)-1}{a(1-e)-1} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{a(1+e)^2-1-e}{a(1-e)^2-1+e} = \sqrt{10}.$$

В итоге получается квадратное уравнение на эксцентриситет:

$$e^2 a\left(1-\sqrt{10}\right) + e(2a-1)\left(1+\sqrt{10}\right) + (a-1)\left(1-\sqrt{10}\right) = 0.$$

Его численное решение сильно упростится (и при этом ответ слабо изменится), если мы учтем, что $\sqrt{10} \approx 3$. Тогда, подставляя числа, получаем, что требуется решить уравнение $5e^2 - 16e + 3 = 0$, корни которого $e_1 = 0.2$, $e_2 = 3$. Геометрически осмысленным является только первый корень, это и есть ответ задачи. Отметим, что «честное» численное решение (без каких-либо округлений) даст ответ $0.20818\ldots$, что мало отличается от полученного нами.

Задача № 62

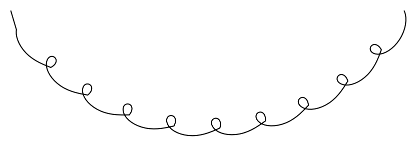
В 2013 году АМС Voyager 1 записала «звуки космоса» — магнитозвуковые волны в плазме, частота которых оказалась равной примерно 2–3 кГц. Считая, что с такой же частотой менялось давление газа в окрестности АМС, оцените наименьшие возможные характерные размеры областей повышенной плотности в газе, в котором находилась станция.

Решение. Изменение давления газа рядом с АМС может происходить как из-за прохождения волн в газе, в котором движется аппарат, так и просто из-за перепада плотностей газа, в котором происходит движение. Первая интерпретация «звуков космоса» не позволяет получить искомую оценку, поскольку волны могут распространяться и во в среднем однородной среде, а вот предположение, что АМС просто «сталкивается» с областями повышенной плотности, позволяет вычислить результат. В самом деле, из условия следует, что подобные столкновения происходят несколько тысяч раз в секунду. Аппарат движется со скоростью порядка 10^1 км/с (нас интересует только порядковая точность, поэтому такой оценкой скорости вполне можно ограничиться), следовательно, между двумя последовательными столкновениями он пролетает расстояние порядка штук метров, и это и есть искомая оценка. Заметим, что возможным движением газа относительно Солнца (приводящим к поправке, аналогичной эффекту Допплера) для порядковой оценки можно пренебречь — характерные скорости движения газа сравнимы со скоростью движения АМС, тем самым порядковая оценка результата не изменится.

Задача № 63

Докажите, что проекция траектории движения Луны относительно Солнца на плоскость эклиптики не имеет самопересечений и везде выпукла наружу.

Решение. Попробуем рассуждать от противного. Если траектория имеет самопересечения, т.е. выглядит как-то примерно так:



то это означает, что существуют участки (например, посередине «петелек»), когда скорость Луны направлена в обратную сторону по сравнению с основным участком траектории. Каким образом может возникнуть подобная ситуация?

Как известно, Земля движется вокруг Солнца со скоростью около 30 км/с (если это неизвестно, то орбитальную скорость легко вычислить, зная продолжительность года и радиус орбиты Земли). Луна относительно Земли движется со скоростью около 1 км/с (что также можно вычислить, зная расстояние до Луны и продолжительность месяца). Поскольку скорость Луны относительно Солнца — векторная сумма двух указанных, очевидно, что ее направление практически не меняется, Луна движется вокруг Солнца то чуть быстрее, то чуть медленнее, но никогда не начинает двигаться обратно, а это означает, что наше исходное предположение ложно.

Аналогичным образом докажем и второе утверждение. Ускорение, действующее на Луну в некоторой точке ее траектории, можно разложить на две компоненты — касательную (отвечающую за изменение модуля скорости) и нормальную (перпендикулярную к вектору скорости и отвечающую за его поворот). Если траектория Луны где-либо выпукла внутрь (т.е. в сторону Солнца), то это означает, что в этом месте нормальная компонента ускорения направлена от Солнца. Поскольку движение Луны определяется силами гравитации со стороны Земли и Солнца, получаем, что в подобной ситуации Луна должна находиться где-то между Землей и Солнцем, причем Земля должна притягивать Луну к себе сильнее, чем Солнце.

Осталось либо вспомнить как известный факт, либо вычислить, что сила притяжения Луны Солнцем примерно в два раза больше, чем сила притяжения ее же Землей (причем орбита Луны вокруг Земли, хотя и не является окружностью, не настолько вытянута, чтобы это соотношение могло качественно измениться), а это означает, что и предположение о выпуклости траектории внутрь приводит к противоречию.

Задача № 64

Звездолет подлетел к звезде главной последовательности и вышел на круговую орбиту с радиусом 0.5 а.е. и периодом обращения 0.25 года. На звездолете установлена ловушка для вещества, собирающая частицы звездного ветра с площади 1 м^2 и запасающая их кинетическую энергию. Также звездолет с помощью солнечных батарей площади 2 м^2 запасает энергию излучения звезды с эффективностью 30%. Известно, что звезда ежегодно теряет 10^{-14} собственной массы в виде звездного ветра, движущегося со скоростью около $4 \cdot 10^2$ км/с. Во сколько раз запасаемая энергия излучения превосходит запасаемую энергию частиц звездного ветра?

Решение. Определим массу звезды по 3-му закону Кеплера, выражая период обращения в годах, радиус орбиты — в астрономических единицах, а массу звезды — в массах Солнца:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M} \implies M = \frac{a^3}{T^2} = \frac{0.5^3}{0.25^2} = 2.$$

Тогда за год звезда теряет $2 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{-14} = 4 \cdot 10^{16}$ кг своего вещества, а за секунду $4 \cdot 10^{16}/(3.16 \cdot 10^7) = 1.3 \cdot 10^9$ кг. Определим массу вещества, которая за секунду попадает в ловушку. Испущенные за 1 секунду частицы на расстоянии орбиты располагаются в сферической оболочке со средним радиусом 0.5 а.е. и толщиной $v \cdot 1$ с $= 400$ км. Тогда на 1 м^2 за секунду приходится масса, равная

$$\mu = \frac{1.3 \cdot 10^9 \text{ кг}}{4\pi(0.5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м})^2} = 1.8 \cdot 10^{-14} \text{ кг}.$$

Кинетическая энергия таких частиц равна

$$E_k = \frac{\mu v^2}{2} = 1.8 \cdot 10^{-14} \cdot (4 \cdot 10^5)^2/2 = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Светимость пропорциональна массе в 4 степени для звезд главной последовательности с массой порядка солнечной, поэтому данная звезда обладает светимостью около $16L_\odot$. Сопоставим освещенность, получаемую космическим кораблем, с солнечной постоянной для Земли:

$$\frac{E}{E_\oplus} = \frac{\frac{L}{4\pi a^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}} = 64.$$

Величина солнечной постоянной около $1.4 \cdot 10^3$ Вт/м^2, следовательно, освещенность от звезды составляет около $9 \cdot 10^4$ Вт/м^2. Поэтому за 1 секунду с учетом эффективности поглощения корабль получает $9 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 0.3 = 5.4 \cdot 10^4$ Дж энергии, что превосходит запасаемую энергию частиц в $5.4 \cdot 10^4 / (1.4 \cdot 10^{-3}) \approx$ $\approx 4 \cdot 10^7$ раз.

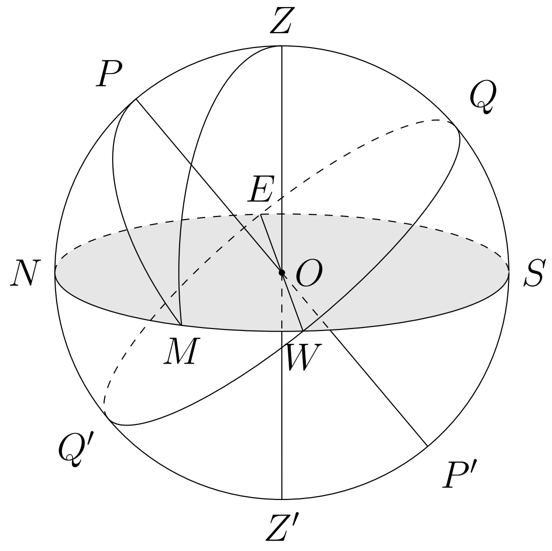
Задача № 65

Любитель астрономии без телескопа видит на небе две ярких звезды. Прикидывая угловое расстояние между ними, он обнаружил, что между этими двумя звездами не могут поместиться четыре сжатых пальца одной вытянутой руки. Кроме этого, известно, что первая звезда имеет модуль эклиптической широты, равный 10°, а азимут захода второй звезды в Петербурге составляет 160°. Какая из этих звезд ярче? Рефракцией пренебречь.

Решение. Предположим, что раз не могут поместиться четыре пальца, то три — могут. Если рассчитать угловой размер трех пальцев вытянутой руки, то получится около 5°–7° (руки у всех немного отличаются, но на ответ это не влияет).

Судя по эклиптической широте, мы имеем дело со звездами одного зодиакального созвездия или двух соседних: максимальное расстояние второй звезды от эклиптики составляет не более 15°.

Информацию об азимуте захода второй звезды используем следующим образом. Построим сферический треугольник с вершинами в северном Полюсе Мира P, зените Z и точке захода звезды M. Тогда $PZ = 90^\circ - \varphi = 30^\circ$ (широта Санкт-Петербурга равна $\varphi = 60^\circ$); $ZM = 90^\circ$, так как это заход звезды, а рефракцией мы пренебрегаем; $\angle PZM = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$; $PM = 90^\circ - \delta_2$, где δ_2 — склонение второй звезды.



Запишем сферическую теорему косинусов для полученного треугольника:

$$\cos PM = \cos ZM \cos PZ + \sin ZM \sin PZ \cos \angle PZM$$

$$\sin \delta = \cos 90^\circ \cos 30^\circ + \sin 90^\circ \sin 30^\circ \cos 20^\circ$$

$$\sin \delta_2 = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(20/57.3)^2}{2}\right) \Rightarrow \sin \delta_2 \approx \frac{17}{36}$$

Получаем оценку склонения второй звезды: $\delta_2 \lesssim 30^\circ$.

Итого мы имеем три пояса небесной сферы, в которых эти две звезды находятся: пояс по склонению $\delta \in [25^\circ; 35^\circ]$ и два пояса с эклиптической широтой: $\beta_+ \in [5^\circ; 15^\circ]$ и $\beta_- \in [-15^\circ; -5^\circ]$. Далее можно нарисовать эти пояса или вспомнить что и где примерно располагается. Отсюда становится понятно, что пояс β_- нас не интересует, т.к. он не пересекается с поясом склонений. Далее заметим, что область пересечения β_+ и пояса склонений расположена в районе точки летнего солнцестояния, и отсюда сделаем вывод, что речь идет о двух звездах, принадлежащих либо созвездию Близнецов, либо созвездию Тельца.

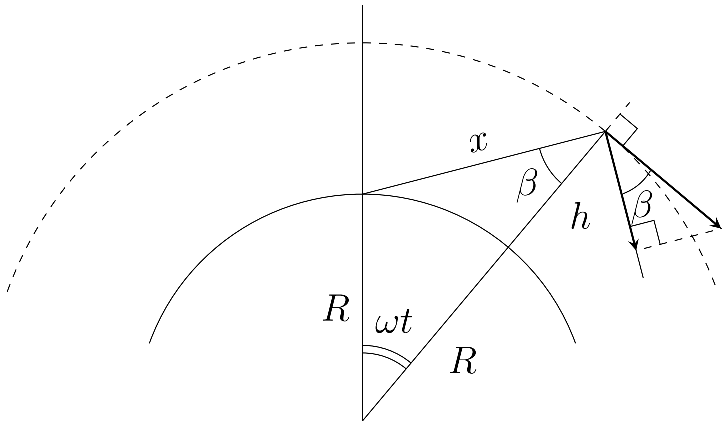
Вообще говоря, вместо приведенного выше рассуждения можно использовать и другое, менее строгое. Поскольку звезды находятся недалеко друг от друга, а у одной из них эклиптическая широта не слишком сильно отличается от нуля, звезды, по-видимому, относятся к зодиакальным созвездиям. Точка захода одной из них в Петербурге близка к точке севера (азимут захода 160°), а это означает, что склонение этой звезды положительно и заметно отличается от нуля. Следовательно, искать подходящие звезды надо в созвездиях, находящихся в районе точки летнего солнцестояния.

Две яркие рядом стоящие звезды (помним про 5°–7°) есть лишь в Близнецах (а также и пересечение получается восточнее точки летнего солнцестояния), значит, речь идет о Касторе (первая звезда) и Поллуксе (вторая звезда, в отличие от Кастора, как раз может зайти в Петербурге). Поллукс — β *Gem*, и он ярче, чем α *Gem*.

Задача № 66

ИСЗ движется по круговой орбите с высотой 200 км и пролетает через зенит. Найдите время, в течение которого его наблюдаемая угловая скорость будет больше половины максимальной.

Решение.



Пусть спутник пролетает через зенит в момент $t = 0$. Если угловая скорость спутника относительно центра Земли ω, то угол при центре Земли в треугольнике наблюдатель–центр Земли–спутник в некоторый момент t будет равен ωt. Тогда угол β при спутнике можно получить из теоремы синусов

$$\frac{\sin\beta}{R} = \frac{\sin\omega t}{x},$$

где R — радиус Земли, $x = \sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega t}$ — расстояние от наблюдателя до спутника (вычисляемое из теоремы косинусов), а h — высота полета спутника.

Наблюдаемая угловая скорость спутника Ω будет отношением тангенциальной скорости $\omega R\cos\beta$ и расстояния до него x:

$$\Omega = \frac{\omega R\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\omega t}{x^2}}}{x}.$$

Несложно заметить, что максимальное значение Ω будет достигаться в тот момент, когда спутник в зените, причем $\Omega_{\max} = \omega R/h$ (что можно получить как из общих соображений, так и подставив $t = 0$ и $x = h$ в уже полученное выражение), а по мере приближения спутника к горизонту наблюдаемая угловая скорость будет убывать. Поэтому нам надо найти $t = \tau$ такое, что $\Omega(\tau) = \Omega_{\max}/2$.

Тогда

$$\frac{\omega R}{h} = 2\,\frac{\omega R\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\omega\tau}{x^2}}}{x},$$

откуда

$$\frac{x^2}{4h^2} = 1 - \frac{R^2 \sin^2 \omega\tau}{x^2}$$

или

$$\frac{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega\tau}{4h^2} = 1 - \frac{R^2 \sin^2 \omega\tau}{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\omega\tau}.$$

Формально осталось всего лишь решить получившееся уравнение относительно τ, но подобная перспектива без использования вычислительной техники выглядит не очень привлекательно, поэтому надо придумать способ упростить вычисления.

Все, кто видел спутники на ночном небе (а видны в основном низкоорбитальные спутники), знают, что время их пролета по видимой половине небесной сферы — минуты (притом минимальный период обращения спутника вокруг Земли составляет около полутора часов). Конечно, тот же результат можно получить и аккуратно — окажется, что наш спутник будет находиться над горизонтом около 6 минут — но в данном случае это излишне. Интересующий нас интервал времени, очевидно, меньше еще как минимум в два раза, а это означает, что величина $\omega\tau$ в любом случае мала. Тогда в качестве приближения можно считать, что $\sin\omega\tau \approx \omega\tau$, а $\cos\omega\tau \approx 1$. Учитывая это, получим

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{R^2\,(\omega\tau)^2}{h^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{h}{\omega R}.$$

Если учесть, что $\omega R \approx 8$ км/с (спутник низкоорбитальный, так что это с достаточной точностью просто первая космическая скорость на поверхности Земли), получаем, что $\tau \approx 22$ с, а интересующий нас полный интервал времени составляет 44 с (или, что правильнее в данном случае, $4 \cdot 10^1$ с).

В этот момент можно заметить, что мы фактически свели задачу к куда более простой: есть бесконечная плоская Земля, над наблюдателем пролетает спутник с некоторой угловой скоростью... Решение такой задачи в конечном счете даст уже полученное приближение и приведет к тому же ответу, однако в этом случае выбор приближения необходимо заранее обосновывать. В дополнение заметим, что честное решение уравнения для настоящей шарообразной Земли даст результат, равный 49 секундам, так что сделанное приближение оказалось не таким уж и плохим.

Задача № 67

Работавший в Париже «ловец комет» Шарль Мессье составил свой знаменитый каталог туманных объектов в конце XVIII века по данным наблюдений на нескольких телескопах, в среднем соответствующих рефрактору с диаметром входного отверстия 6 см, находящемуся в идеальных условиях. В каталог, в частности, вошли 28 спиральных галактик. Оцените полное число спиральных галактик, в которых при использовании современных оптических телескопов принципиально возможно наблюдать отдельные звезды (без учета вспыхивающих).

Решение. Проницающая способность телескопа, в который смотрят глазом, при идеальных условиях, идеальном зрении, использовании равнозрачкового увеличения и т.п. составляет $m_{\text{M}} = 6^m + 5\lg\frac{D}{d}$, где D — диаметр входного отверстия телескопа, а d — диаметр зрачка. Полагая последний $d \approx 6$ мм, получим, что $m_{\text{M}} = 11^m$ (в реальности получалось несколько более 10^m — Париж в XVIII веке уже не был идеальным местом для наблюдений).

Выберем в качестве удобного объекта для сравнения Туманность Андромеды (она же M31). Она имеет интегральную видимую звездную величину 4^m и находится на расстоянии 1 Мпк (мы округлили оба значения вверх для удобства вычислений). Если считать, что все спиральные галактики похожи на M31, получается, что Мессье мог увидеть объекты на 7^m слабее (т.е. освещенность от которых была в $\approx\ 2.5^7$ раз меньше). Однако освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния, поэтому «дальнобойность» наблюдений Мессье должна была составлять $2.5^{3.5} \approx 25$ Мпк.

Теперь займемся современностью. Сейчас в крупные оптические телескопы глазом никто не смотрит, однако известно, что их предельная проницающая способность составляет около $+30^m$ (у HST при длительной экспозиции даже чуть больше). Самые яркие звезды имеют в оптическом диапазоне абсолютную звездную величину $M = -5^m$, поэтому предельное расстояние, на котором их можно увидеть (без учета поглощения света в межзвездной среде обеих галактик, сложностей с выделением объектов и т.п.) можно получить из известного выражения $M = m - 5\lg r + 5$. Получаем $r = 10^8$ пк, т.е. 100 Мпк. Таким образом, расстояние оказывается в 4 раза больше, чем доступное Мессье, и это означает, что галактик, в предположении их примерно равномерного распределения в пространстве, должно быть в $4^3 = 64$ раза больше, т.е. всего около $28 \times 64 \approx 2 \cdot 10^3$.

Следует также отметить, что для наблюдения отдельных звезд совершенно недостаточно видеть галактику как протяженный объект, поэтому определение предельного расстояния по этому критерию даст сильно завышенный результат. В качестве очевидного в буквальном смысле слова контрпримера все желающие могут посмотреть ночью без телескопа на Туманность Андромеды или (при проживании в подходящих областях Земли) на Магеллановы Облака и попытаться увидеть отдельные звезды в этих несомненно протяженных даже для невооруженного глаза объектах. Можно также заметить, что угловой диаметр Туманности Андромеды составляет около 3°, так что аналогичные галактики, находящиеся на расстояниях до 100 Мпк, будут иметь угловые размеры, большие

$1'$ (и превышающие предельное угловое разрешение человеческого глаза), что не поможет не только увидеть в них глазом отдельные звезды, но — в большинстве случаев — даже увидеть галактики целиком.

Задача № 68

Американский спутник Vanguard-1 является четвертым искусственным спутником Земли. Он представляет собой алюминиевую сферу диаметром 16 см с шестью длинными тонкими антеннами. Спутник был запущен 17 марта 1958 года на орбиту, период обращения для которой составляет 134 минуты, эксцентриситет орбиты $e = 0.184$, наклон $i = 34^\circ.2$. Когда проще увидеть спутник при наблюдении из Петербурга: в апогее или перигее? Альбедо алюминия считать равным единице.

Решение. Сперва найдем большую полуось орбиты спутника из III закона Кеплера (сравним, для простоты, с геостационарным спутником Земли ($T_0 = 24$ часа), радиус орбиты которого равен $a_0 = 42$ тыс. км):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} = \frac{T_0^2}{a_0^3}$$

и

$$a = a_0\sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}} = 42 \times 10^3 \text{ км}\sqrt[3]{\left(\frac{134/60}{24}\right)^2} \approx 42 \times 10^3 \text{ км}(0.45)^2 \approx 8600 \text{ км}.$$

Спутник обращается с 1958 года, значит, был такой момент, когда линия апсид его орбиты лежала в плоскости меридиана Санкт-Петербурга. Тогда угол между Санкт-Петербургом и осью апсид при наблюдении из центра Земли равен $\gamma = \varphi - i = 60^\circ - 34.2^\circ \approx 26^\circ$. Рассчитаем, на каком расстоянии должен находиться спутник, чтобы он был виден на горизонте:

$$r_{max} = \frac{R_\oplus}{\cos\gamma} = \frac{6400 \text{ км}}{\cos 26^\circ} = \frac{6400 \text{ км}}{\cos 30^\circ \cos 4^\circ + \sin 30^\circ \sin 4^\circ} \approx \frac{6400 \text{ км}}{\cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \frac{4^\circ}{57.3^\circ}} =$$

$$= \frac{12800 \text{ км}}{\sqrt{3} + 1/15} \approx \frac{12800 \text{ км}}{1.8} = 7100 \text{ км}.$$

Апоцентрическое расстояние составит $r_\alpha = a(1 + e) \approx 10$ тыс. км, а перицентрическое $r_\pi = a(1 - e) \approx 7$ тыс. км. Отсюда следует, что в перицентре орбиты спутник наблюдать просто невозможно, поэтому условия освещения спутника роли не играют. В итоге проще увидеть спутник, когда он в апогее орбиты (причем он будет достаточно высоко над горизонтом).

Задача № 69

Известно, что концентрация фотонов, испущенных абсолютно черным телом, непосредственно около этого тела может быть вычислена как $n \approx 20\,T^3$ (где температура дана в кельвинах, а концентрация выражена в см$^{-3}$). Оцените суммарное количество фотонов, находящихся в данный момент внутри Галактики.

Решение. Первое, что хочется сделать при решении задачи — сосчитать фотоны, которые испускаются звездами (поскольку это самые яркие источники излучения внутри Галактики). Средняя звезда Галактики — это красный карлик с массой около половины солнечной, однако присутствующие в сравнительно небольшом количестве яркие звезды производят каждая существенно больше фотонов.

Поэтому для оценки будем считать, что в Галактике 10^{11} звезд, имеющих эффективную температуру 10^4 K (горячее Солнца) и радиус 10^{-2} а.е. каждая (больше Солнца). Практически все звезды либо холоднее, либо меньше (а для подавляющего большинства верно и то, и другое), так что тем самым мы завысим итоговую оценку.

1 а.е. — это $1.5 \cdot 10^{13}$ см, поэтому площадь поверхности каждой такой такой звезды составит $4\pi R^2 = 4 \cdot 3 \cdot 1.5^2 \cdot 10^{22} = 3 \cdot 10^{23}$ см^2, а в слое толщиной 1 см около каждой такой звезды будет иметься $3 \cdot 10^{23} \cdot 20 \cdot 10^{12} = 6 \cdot 10^{36}$ фотонов. Поскольку они постоянно разлетаются со скоростью света, за 1 секунду их должно образовываться в $3 \cdot 10^{10}$ раз больше, т.е. $2 \cdot 10^{47}$. Таким образом, все звезды Галактики за секунду производят $2 \cdot 10^{58}$ фотонов и, поскольку поперечник Галактики составляет около 10^3 световых лет (а в году $3 \cdot 10^7$ секунд), за время порядка 10^{11} секунд большинство из этих фотонов, если ничем не поглотятся, заведомо покинут Галактику. Следовательно, максимально возможное число фотонов, произведенных звездами и находящихся в Галактике, составляет $2 \cdot 10^{69}$ (и эта оценка существенно завышена).

Однако звезды не являются единственным источником излучения. В Галактике присутствует реликтовое излучение, которое является чернотельным с температурой $T \approx 2.7$ K и изотропным, и концентрация фотонов которого везде тем самым составляет $n \approx 20 \cdot 2.7^3 = 4 \cdot 10^2$ см$^{-3}$. Считая, что радиус Галактики равен 50 тыс. световых лет, получаем объем диска Галактики, составляющий $6 \cdot 10^{66}$ см^3, в котором должно находиться $2 \cdot 10^{69}$ реликтовых фотонов.

Таким образом, получается, что общее число реликтовых фотонов и завышенная оценка числа «звездных» фотонов примерно совпадают, откуда следует, что определяющими являются реликтовые фотоны. Если оценивать размеры Галактики с учетом не только диска (в котором в основном сосредоточены звезды), то разница будет еще более заметной, поэтому для порядковой оценки можно взять количество фотонов реликтового излучения, округлив порядок вверх — до 10^{70} штук.

Задача № 70

Космический аппарат находится на геостационарной орбите Земли. Удельный импульс его двигателя 4500 м/с. Масса космического аппарата без топлива составляет одну тонну. Масса топлива — 6.4 тонны. Сможет ли он покинуть Солнечную систему? Если нет — почему? Если да — как?

Решение. Для начала определим, на какую величину скорость космического аппарата может быть увеличена непосредственно тягой двигателя. Воспользуемся формулой Циолковского:

$$\Delta v = I \cdot \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = 9 \text{ км/с},$$

где m_2 — масса космического аппарата с топливом, m_1 — масса космического аппарата без топлива, а I — удельный импульс двигателя.

Геостационарная орбита Земли — экваториальная орбита, период обращения на которой равен периоду обращения Земли, то есть (здесь и далее все величины в СИ, если не указано обратное):

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (86 \cdot 10^3)^2}{4\pi^2}} = 4 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Скорость космического аппарата на этой орбите составит:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_E}{a_0}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 10^7}} = 3 \text{ км/с}.$$

Найдем скорость на бесконечном отдалении от Земли, записав закон сохранения энергии:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_s^2}{2} - \frac{GM_E m}{a_0},$$

где v_s — скорость старта, в данном случае просто $v_0 + \Delta v$.

Подставив все величины и посчитав (в км/с), получим:

$$u = \sqrt{2v_0\Delta v - v_0^2 + \Delta v^2} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 9 - 3^2 + 9^2} = 11 \text{ км/с}.$$

Для того, чтобы вылететь за пределы Солнечной системы при бесконечном удалении от Земли, скорость космического аппарата должна быть не меньше, чем $(\sqrt{2}-1)v_E$, т.е. 12 км/с (при сонаправленных векторах скорости космического аппарата и Земли, в других случаях потребуется большая скорость). Однако же это не оптимальный вариант полета. Есть более выгодная траектория, по которой космический аппарат и сможет покинуть Солнечную систему.

Существует так называемый эффект Оберта. Он заключается в том, что ракетный двигатель, движущийся с высокой скоростью, совершает больше полезной работы, нежели такой же двигатель, движущийся медленно. Это несложно понять из следующих соображений:

$$\frac{dE_k}{dt} = F\frac{ds}{dt} = F \cdot v$$

В таком случае, если совершать разгон с большей скоростью, прирост кинетической энергии будет больше. Теперь рассмотрим выгодную траекторию полета. Самый простой способ достичь большой скорости — опустить перицентр орбиты. Опустить его сколь угодно низко не получится из-за размеров Земли и земной атмосферы. Высоту орбиты низкоорбитальных спутников можно принять за $h \approx 500$ км, то есть перицентрическое расстояние составит $R_p = R_E + h \approx \approx 7 \cdot 10^3$ км. Найдем эксцентриситет переходной орбиты космического аппарата. Очевидно, что апоцентрическое расстояние $R_a = a_0 = 4 \cdot 10^4$ км, тогда запишем уравнения для апоцентра и перицентра, где a — большая полуось переходной орбиты:

$$\begin{cases} a_0 = a(1+e) \\ R_p = a(1-e) \end{cases}$$

$$e = \frac{a_0 - R_p}{a_0 + R_p} \approx 0.7$$

Для перехода на такую орбиту космическому аппарату потребуется изменение скорости (по модулю):

$$\Delta v_1 = v_a - v_0 = v_0 - v_0\sqrt{1-e} = v_0(1 - \sqrt{1-e}) \approx 1.6 \text{ км/с}$$

Для дальнейшего разгона у космического аппарата останется:

$$\Delta v_2 = \Delta v - \Delta v_1 = 7.4 \text{ км/с}$$

Скорость космического аппарата при пролете перицентра составит:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_E(1+e)}{R_p}} = 10 \text{ км/с}$$

Вновь запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_s^2}{2} - \frac{GM_E m}{R_p}$$

В данном случае $v_s = v_1 + \Delta v_2 = 17.4$ км/с и:

$$\frac{GM_E}{Rp} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^1 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$u=\sqrt{v_s^2-\frac{2GM_E}{Rp}}=\sqrt{17.4^2-2\cdot6\cdot10^1}\approx\sqrt{300-120}=\sqrt{180}\approx13\text{ км/с}$$

$$13\text{ км/с}>(\sqrt{2}-1)v_E=12\text{ км/с}$$

Получается, что при полете по такой траектории космический аппарат сможет покинуть Солнечную систему. Почти все величины в этом решении были посчитаны с точностью до одной значащей цифры, тем не менее это достаточная оценочная точность для этой задачи. При более точном подсчете с помощью вычислительной техники получается такой же конечный ответ.

Заметим, что это не единственное возможное решение данной задачи. Даже при разгоне, описанном в первом случае, космическому аппарату хватит топлива чтобы долететь до, например, Юпитера, около которого он может совершить гравитационный маневр, тем самым набрав необходимую скорость для вылета из Солнечной системы. Рассмотрим пролет мимо Юпитера. Выше было получено (при подсчете первого варианта полета), что скорость космического аппарата в окрестности Земной орбиты составит $u_\pi=41$ км/с. Тогда момент импульса космического аппарата составит $L=41$ км/с $\cdot$ а.е. Большая полуось Юпитера $r=5$ а.е. Большая полуось орбиты Земли $a_0=1$ а.е. Из закона сохранения энергии получим, что скорость космического аппарата в окрестности орбиты Юпитера составит:

$$u=\sqrt{{u_\pi}^2+2{v_E}^2\frac{(a_0-r)}{r}}=16\text{ км/с}$$

Из закона сохранения момента импульса получим, что угол между скоростью и радиус-вектором составит:

$$\sin\alpha=\left(\frac{L}{ur}\right)=0.5$$

Очевидно, что угол меньше 90^o, тогда $\alpha=30^o$.

Теперь рассмотрим сам гравитационный маневр. В системе отсчета Юпитера скорость космического аппарата на бесконечности будет равна $\vec{V}=\vec{u}-\vec{v_J}$. Из треугольника векторов решением треугольника получим:

$$|\vec{V}|=\sqrt{v_J^2+u^2-2v_Ju\cos(90^\circ-\alpha)}=15\text{ км/с}$$

Траектория пролета — гипербола. Найдем угол разворота (θ) из уравнения гиперболы в полярных координатах (из условия стремления расстояния к бесконечности):

$$r=\frac{p}{1+e\cos\phi}$$

$$\cos\phi_{max} = -\frac{1}{e}$$

$$\cos(\pi - \phi_{max}) = \frac{1}{e}$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - 2(\pi - \phi_{max})) = -\cos(2\phi_{max}) = 1 - 2\cos^2\phi_{max} = 1 - \frac{2}{e^2}$$

В перицентре гиперболы скорость выражается через закон сохранения энергии:

$$\upsilon^2 = V^2 + \frac{2GM_J}{R}$$

Но в то же время это также:

$$\upsilon^2 = \frac{GM(1+e)}{R}$$

И также учтем, что вторая космическая скорость в точке пролета:

$$\frac{2GM}{R} = \upsilon_{II}^2$$

Из последних четырех выражений получим конечную зависимость угла разворота от начальной скорости и минимального расстояния пролета:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{2\upsilon_{II}^4}{(2V^2 + \upsilon_{II}^2)^2}$$

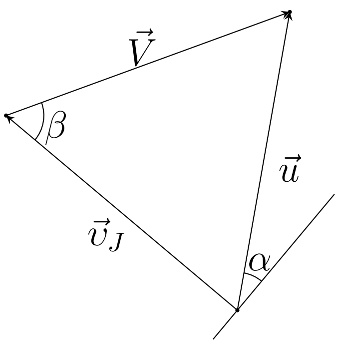
Максимальная скорость относительно Солнца после пролета будет в том случае, если угол разворота будет таков, что при удалении от Юпитера скорость космического аппарата будет сонаправлена со скоростью самого Юпитера. Теперь рассмотрим полученное выражение. При далеком пролете мимо Юпитера вторая космическая скорость будет много меньше V, и угол $\theta \approx 0$, т.е. фактически разворота не будет. При очень близком пролете мимо Юпитера угол разворота будет максимален и равен:

$$\upsilon_{IImax}^2 = \frac{2GM_J}{R_J} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{27}}{7 \cdot 10^7} = 4 \cdot 10^3 \text{ км}^2/\text{с}^2$$

$$\theta_{max} = \arccos\left(1 - \frac{2\upsilon_{IImax}^4}{(2V^2 + \upsilon_{IImax}^2)^2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 4^2 \cdot 10^6}{(2 \cdot 225 + 4000)^2}\right)$$

$$\theta_{max} = \arccos(-0.6) = \pi - \arccos(0.6) \approx 130^o$$

Получается, что КА при пролете мимо Юпитера может развернуться на любой угол от 0° до 130° (в зависимости от минимального расстояния пролета). Вернемся к треугольнику векторов.



Из теоремы синусов:

$$\sin\beta = \frac{\sin(90-\alpha)\cdot u}{V} = 0.9$$

$$\beta > 60^o$$

После пролета КА развернется, и его скорость может быть сонаправлена со скоростью Юпитера, если $\pi - \beta < \theta_{max}$. Это неравенство выполняется, значит после пролета скорость КА может быть сонаправлена с орбитальной скоростью Юпитера. Вспомним, что $V > v_J(\sqrt{2}-1)$. Получается, что КА сможет покинуть Солнечную систему и таким образом тоже.

Напоследок отметим, что это не единственный возможный вариант гравитационного маневра. Также возможны комбинации гравитационного маневра с эффектом Оберта.

Задача № 71

Вам дана карта, показывающая, в каких точках в течение 2018 года марсоход Curiosity производил измерения процентного содержания водяного льда в марсианском грунте при помощи прибора «ДАН», изготовленного российскими учеными. Рядом с кружочками подписаны номера солов — марсианских суток, когда делались измерения. На карте приведена сетка ареографических координат: буква E означает восточную долготу, а буква S означает южную широту. Масштаб по обеим осям одинаков.

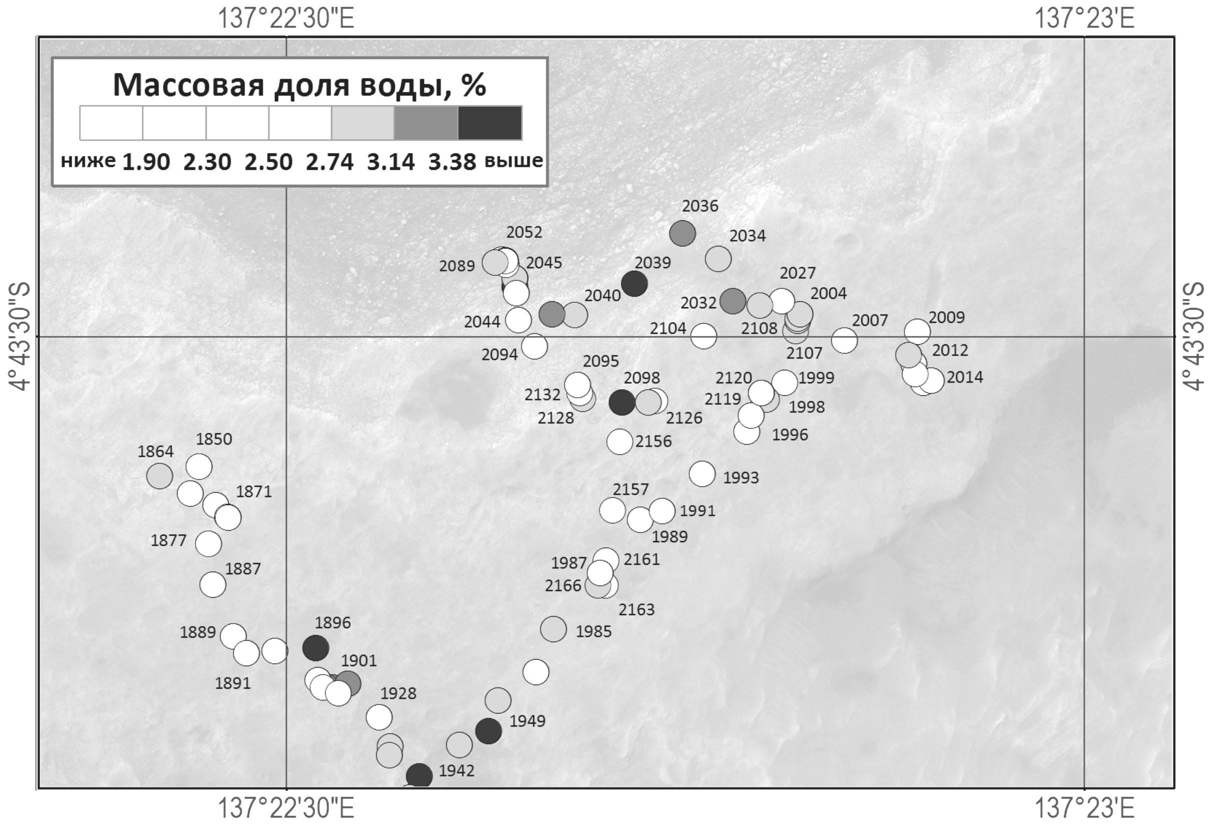
По этой карте определите насколько возможно точнее:

1. ареографические координаты мест, в которых удалось обнаружить максимальное содержание водяного льда за 2018 год;

2. длину траектории марсохода (в километрах);

3. среднюю скорость марсохода.

Не забудьте подробно описать методику получения данных. Можно считать, что диаметр Марса в два раза меньше диаметра Земли, сутки на Марсе длятся 24 часа 40 минут.



К задаче № 71.

Решение. Для выполнения первого пункта задания необходимо воспользоваться легендой в верхнем углу карты: чем темнее кружок, тем больше льда в этой точке обнаружено. Это произошло на 1896, 1942, 1949, 2039 и 2098 солы путешествия Curiosity. Итоговые результаты измерений координат запишем в таблицу ниже. Для получения координат необходимо получить масштаб изображения.

Измерения показывают следующее: фрагмент карты — 10×15 см, $30'' = 106$ мм. Стоит учесть, что значение долготы увеличивается вправо (т.к. E означает восточную долготу), а широты — вниз (т.к. S означает южную широту). Для краткости укажем координаты пунктов относительно точки с координатами $137°22'30''$ в.д., $4°43'30''$ ю.ш. (пересечение двух прямых ареографической сетки слева).

Сол	Долгота, $137°22'30''+$	Широта, $4°43'30''+$
1896	$1.13''$	$11.60''$
1942	$5.09''$	$16.42''$
1949	$7.64''$	$15.00''$
2039	$13.02''$	$-1.98''$
2098	$12.45''$	$2.55''$

Для измерения длины траектории соединим последовательно центры кружков между собой в порядке увеличения номеров солов. Получится ломаная линия, длину которой можно измерить линейкой. При аккуратных измерениях должно получиться примерно 366 мм, что в масштабе карты равно $104''$. Так как Curiosity ездил рядом с экватором, то можно считать, что длина одного градуса в этой области равна 56 км (поскольку диаметр Марса в два раза меньше земного, то и дуга экватора 1° в два раза меньше, чем на Земле, для которой это около 111 км); если результат огрубить, то можно считать, что $1'$ равна 1 км. Здесь 1.7 угловых минуты, то есть Curiosity проехал 1.7 км за $(2163-1850) = 313$ солов. Продолжительность одного сола равна 24 часа 40 минут (24.67 часа), значит средняя скорость равна

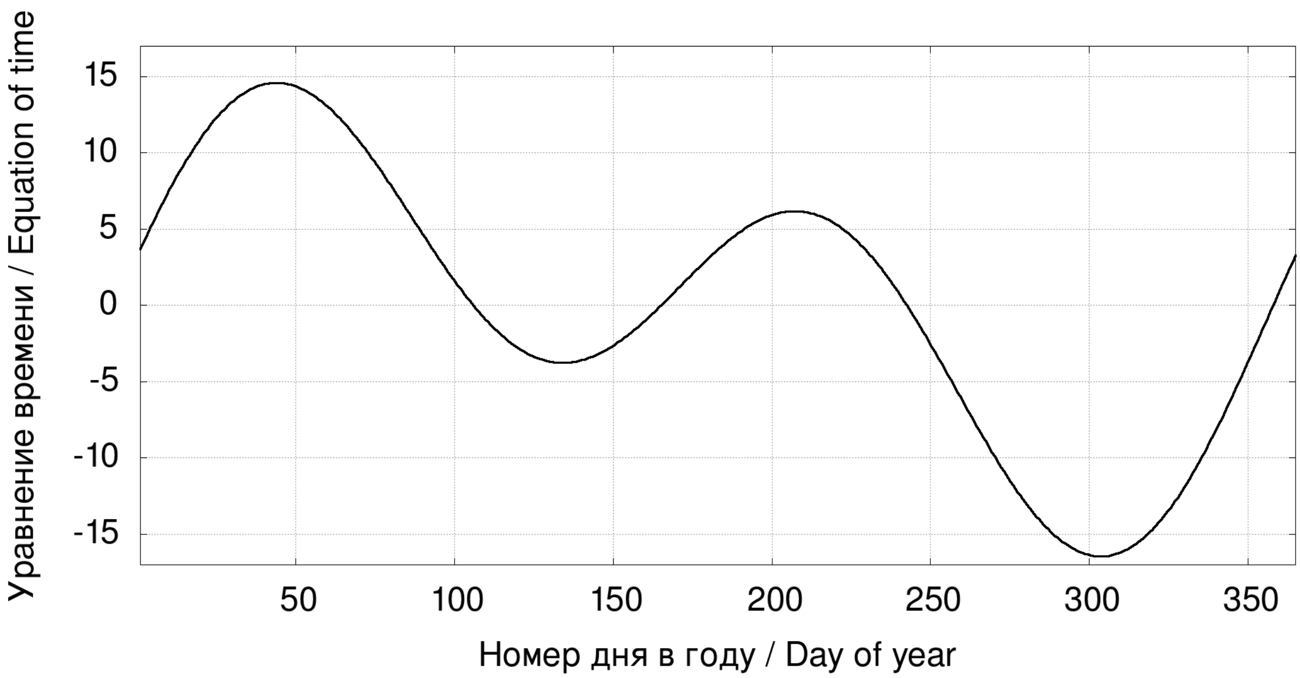
$$v_{\text{ср}} = \frac{1720 \text{ м}}{313 \cdot 24.67 \text{ ч}} = 0.223 \text{ м/ч} = 22 \text{ см/ч}$$

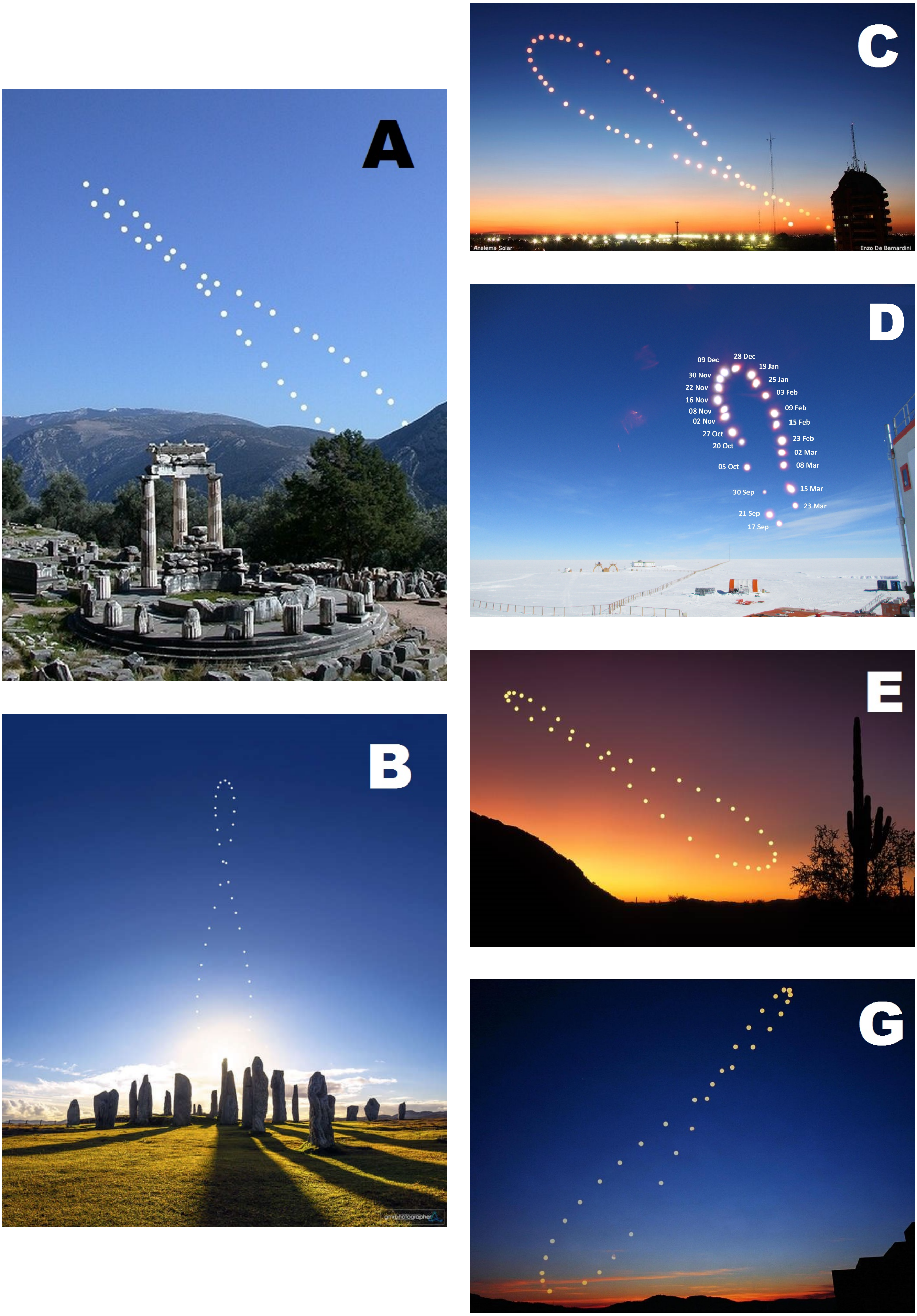
Задача № 72

На каждой из шести фотографий на следующей странице представлены положения Солнца в некоторой местности в одно и то же среднее солнечное время, но в разные дни года. Для каждой фотографии укажите, в каком полушарии и в какое время суток (утро, день или вечер) производилась съемка. Какая фотография сделана дальше всего от экватора? Объясните все сделанные Вами выводы.

Можно считать, что среднее солнечное время — это время, которое показывают обычные часы, а истинное солнечное время — время, которое показывают солнечные часы.

Разность между средним и истинным солнечным временем (так называемое «уравнение времени») в зависимости от номера дня в году представлена на рисунке ниже:




A
C
Analema Solar
Enzo De Bernardini
D
09 Dec
28 Dec
19 Jan
30 Nov
25 Jan
22 Nov
03 Feb
16 Nov
08 Nov
09 Feb
02 Nov
15 Feb
27 Oct
20 Oct
23 Feb
02 Mar
08 Mar
05 Oct
30 Sep
15 Mar
23 Mar
21 Sep
17 Sep
B
E
G

К задаче № 72.

Решение. Кривая на фотографиях[2] называется аналеммой. Она возникает из-за того, что среднее солнечное время не совпадает с истинным, и в разные дни года разность между ними имеет различные значения. Абсолютные значения локальных максимумов уравнения времени в мае и июле меньше, чем в ноябре и феврале. Поэтому меньшая петля аналеммы соответствует положению Солнца вблизи летнего солнцестояния, большая — вблизи зимнего. Отсюда легко определить полушарие: в северном полушарии выше будет меньшая петля, в южном — большая.

Аналемма вытянута вдоль круга склонений, и в средних широтах ее верхняя (по отношению к горизонту) часть восходит раньше и заходит позже, чем нижняя часть. В частности, поэтому при «верхнем» положении Солнца день длиннее, чем при «нижнем», т.к. нижняя часть аналеммы описывает над горизонтом меньшую дугу. При этом в полдень аналемма должна располагаться вертикально. Вспомнив, что в средних широтах северного полушария Солнце движется «слева направо», а в южном, наоборот, «справа налево», получаем итоговый ответ:

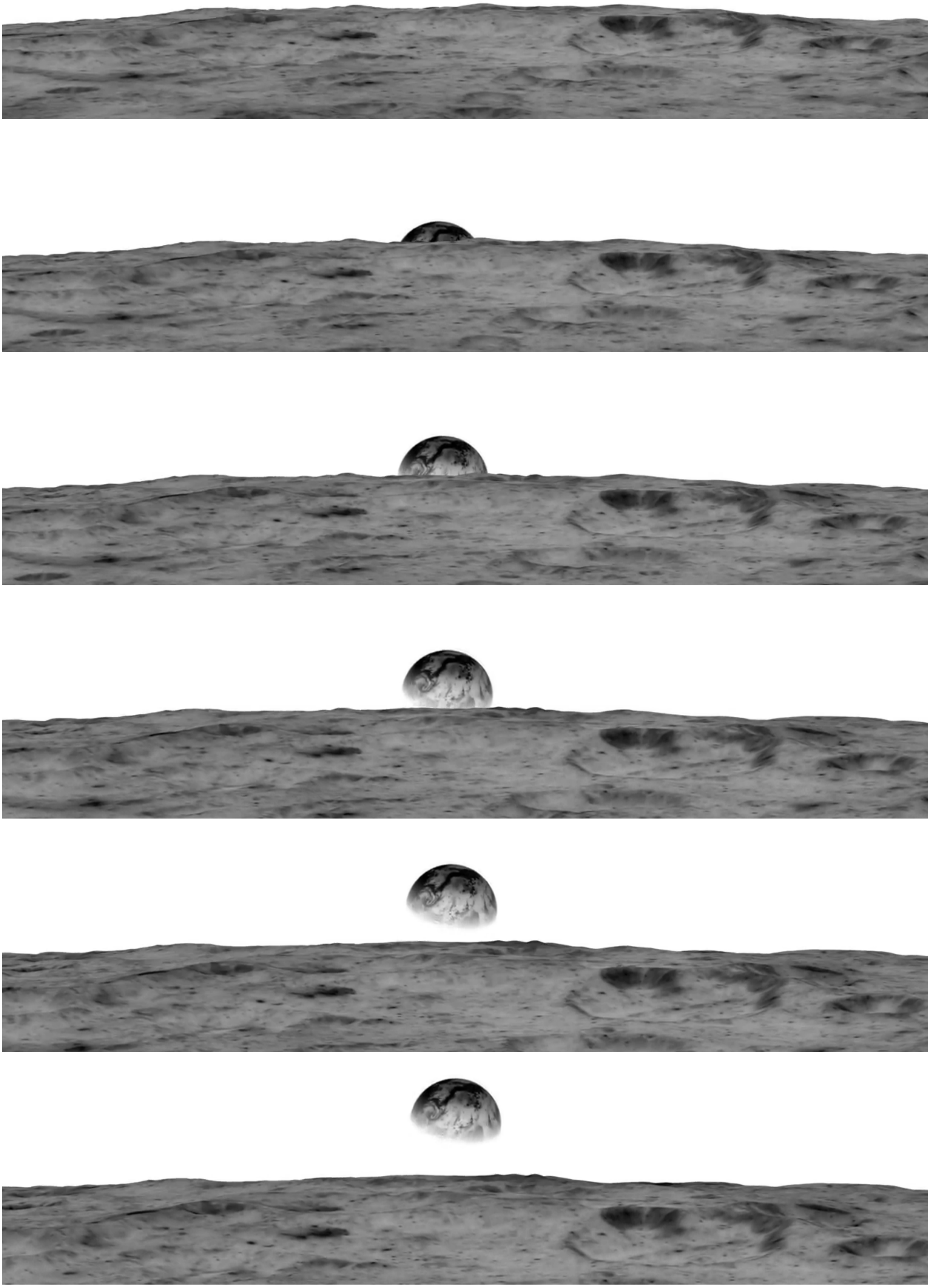
A – северное полушарие, утро;
B – северное полушарие, день;
C – южное полушарие, вечер;
D – южное полушарие, «день» (см. ниже);
E – северное полушарие, утро;
G – северное полушарие, вечер.

Дальше всего от экватора была сделана фотография D — несмотря на то, что аналемма расположена почти вертикально, видна только одна из петель. Такое бывает в приполярных областях, где есть полярная ночь. То, что это именно южное полушарие, можно понять по датам, указанных для каждого положения Солнца. Отметим, что т.к. вблизи полюсов круги склонений в любой части неба пересекают горизонт практически под прямым углом, то определить местное время по одной лишь фотографии невозможно. С другой стороны, в полярный день в любое время «день».

Задача № 73

Серия снимков Земли на следующей странице была сделана космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите вокруг Луны. Оцените, на какой высоте над поверхностью Луны летел аппарат, если известно, что интервал времени между соседними снимками равняется 8 секундам. Можно считать, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а диаметр — в 4 раза меньше диаметра Земли.

[2] Во время тура у всех участников были черно-белые фотографии, но в решении для наглядности приведены исходные — цветные.



К задаче № 73.

Решение. Сразу заметим, что серия снимков — реальна, и была сделана астронавтами, облетавшими Луну 24 декабря 1968 года на «Аполлоне-8».

На серии снимков видна поднимающаяся из-за горизонта Луны Земля. По условию, интервал времени между соседними снимками равняется 8 с, поэтому время, прошедшее между первым и последним снимками, равно $5 \cdot 8 = 40$ с. Если внимательно присмотреться к первому снимку, то можно увидеть, что в тот момент, когда он был сделан, из-за горизонта показался край земного диска. Если же на последнем снимке достроить изображение Земли до полного диска, то окажется, что в тот момент, когда был сделан последний снимок, Земля уже полностью показалась над лунным горизонтом и даже оказалась чуть-чуть выше его. Следовательно, 40 с — это время полного восхода Земли для наблюдателей с космического корабля. Определять время восхода с большей точностью бессмысленно ввиду неопределенности моментов начала и конца восхода. По серии рисунков также видно, что Земля восходит не совсем вертикально, но отклонение траектории ее восхода от вертикального направления очень мало, так что в оценочной задаче им можно пренебречь.

Луна все время повернута к Земле одной стороной, если не считать либраций. Однако период либраций равен периоду обращения Луны вокруг Земли и тем самым намного больше, чем 40 с. Отсюда очевидно, что эффект восхода Земли обеспечивается исключительно движением корабля.

Так как диаметр Земли в 4 раза больше лунного, то ее угловой диаметр на небе Луны также в 4 раза больше углового диаметра лунного диска на земном небе и равен 2°. Тем самым угловая скорость аппарата равна 2° за 40 с, или 180°/час, т.е. период обращения равен $P = 2$ часам.

Дальше задача заключается в том, чтобы найти высоту h орбиты спутника Луны с периодом 2 часа. Это можно делать разными способами. Самый прямой — это воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$\frac{(R_{☾} + h)^3}{P^2} = \frac{GM_{☾}}{4\pi^2}$$

Отсюда

$$(R_{☾} + h)^3 = \frac{GM_{☾} P^2}{4\pi^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (2 \cdot 3600)^2}{4\pi^2 \cdot 81} \approx 4^3 \cdot 10^{17}$$

$$R_{☾} + h = \sqrt[3]{4^3 \cdot 10^{17}} = 4\sqrt[3]{100} \cdot 10^5 \text{ м} \approx 1800 \text{ км}.$$

Следовательно, т.к. $R_{☾} = R_{\oplus}/4 = 6400/4 = 1600$ км, то $h \approx 200$ км.

Второй способ: через круговую скорость. Круговая скорость для орбиты высотой h

$$v^2 = \frac{GM_{☾}}{R_{☾} + h}$$

Тогда отношение первой космической скорости (т.е. скорости на стелющейся круговой орбите) к скорости на орбите с высотой h равно

$$\left(\frac{v_{I☾}}{v}\right)^2 = \frac{R_☾ + h}{R_☾}$$

С другой стороны

$$v = \frac{2\pi(R_☾ + h)}{P},$$

тогда

$$v_{I☾}^2 = v^2\frac{R_☾ + h}{R_☾} = \frac{[2\pi(R_☾ + h)]^2(R_☾ + h)}{R_☾ P^2} = \frac{4\pi^2 R_☾^2}{P^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3$$

Первую космическую скорость для Луны можно найти по сравнению с первой космической скоростью для Земли:

$$\left(\frac{v_{I☾}}{v_{I\oplus}}\right)^2 = \frac{M_☾}{M_\oplus}\frac{R_\oplus}{R_☾} = \frac{4}{81},$$

тогда

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 = \frac{4v_{I\oplus}^2 P^2}{814\pi^2 R_☾^2} = \frac{8^2\cdot 2^2\cdot 3600^2}{9^2\cdot\pi^2\cdot 1600^2} \approx \frac{8}{5} = 1.6.$$

Далее можно либо приближенно вычислить $\sqrt[3]{1.6} \approx 1.17$, получив отсюда, что $h = 0.17\cdot 1600 \approx 270$ км, либо воспользоваться фактом, что $h/R_☾$ малая величина и, следовательно,

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^3 = 1 + 3\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^3 \approx 1 + 3\frac{h}{R}.$$

Тогда

$$1 + 3\frac{h}{R} \approx \frac{8}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{h}{R} \approx \frac{1}{5},$$

следовательно $h \approx 300$ км.

Следует заметить, что мы получили завышенное значение высоты, т.к. реальный радиус Луны чуть больше значения, которое мы использовали, и равен 1734 км. Если иметь это в виду, то высота получится меньше и будет равна около 120 км, что соответствует реальной высоте, на которой летал «Аполлон-8».

Задача № 74

31 января 2019 года на небе можно было наблюдать Луну рядом с Юпитером и Венерой. Этим воспользовались два любителя астрономии, живущие в Северном полушарии, которые сфотографировали это явление. Вам даны вырезки из их фотографий (негативы). Воспользовавшись фотографиями, сделайте следующее:

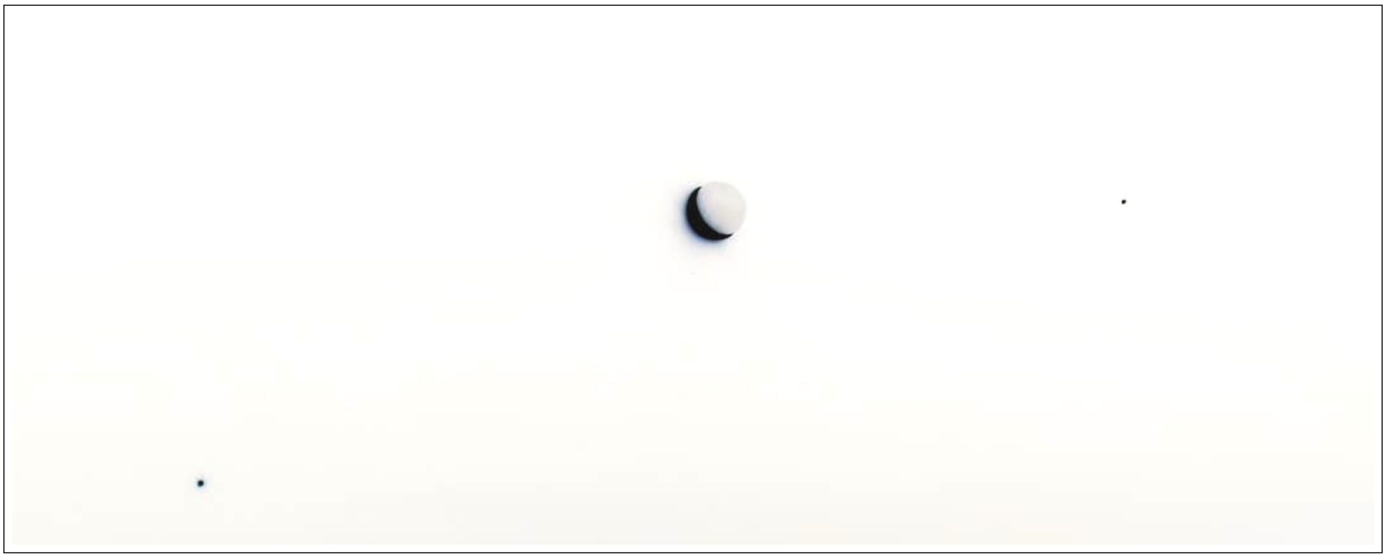
- отождествите небесные тела на фотографиях;
- определите как можно точнее время, прошедшее между снимками;
- определите, в каком созвездии в это время находилась Луна;
- оцените расстояния до планет в момент события;
- оцените расстояние между точками на Земле, где были сделаны фотографии, если известно, что азимуты центров фотографий в обеих точках были примерно одинаковы.

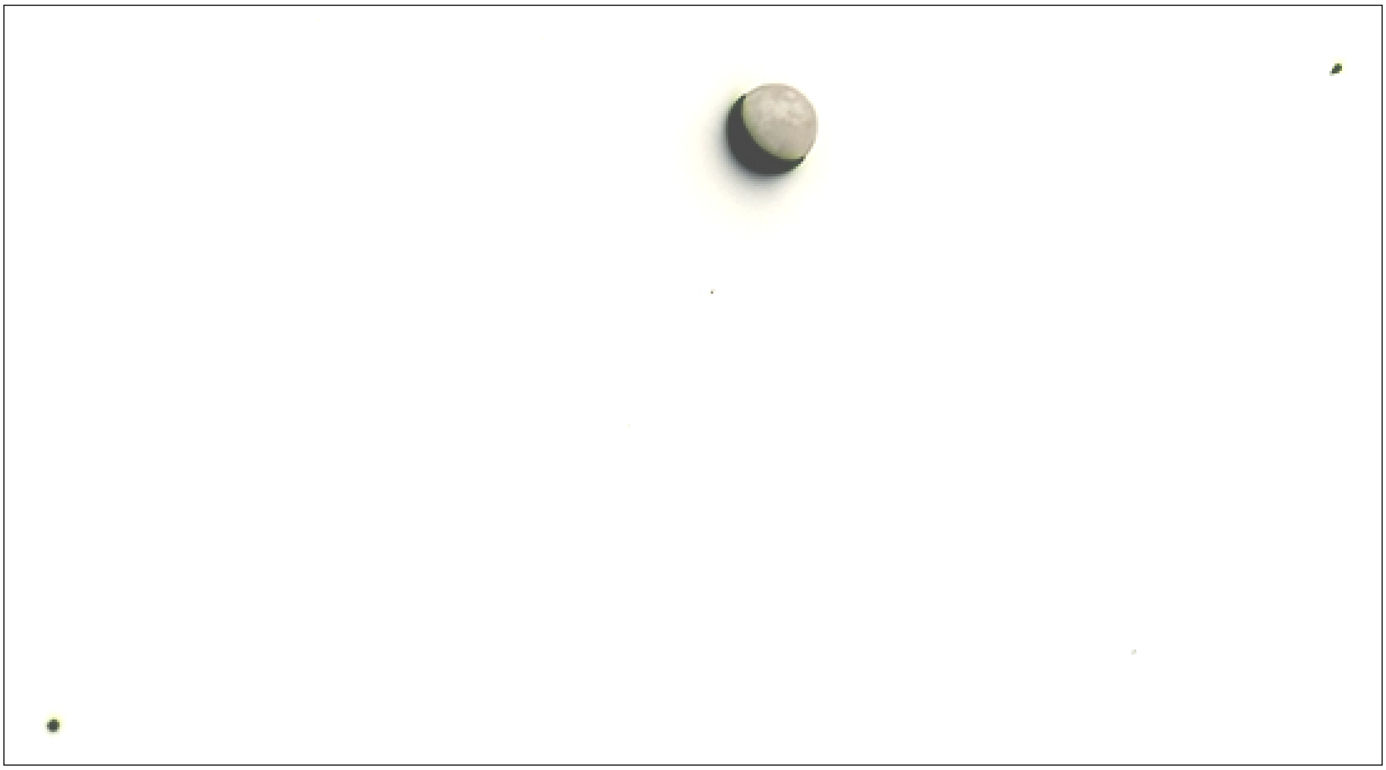
Можно считать, что нижние границы каждой из вырезок параллельны горизонту, а все планеты движутся вокруг Солнца по круговым орбитам в плоскости эклиптики.

Решение. Будем считать очевидным тот факт, что объект посередине между двумя точками и с фазой — Луна. Поскольку Юпитер и Венера видны рядом на небе, это значит, что угловое расстояние каждой из планет от Солнца не превышает 47°, это видно в том числе и по фазе Луны. Юпитер сопоставим по яркости с Венерой только около противостояния, поэтому в виду того, что левая точка явно ярче, чем правая, можно заключить, что слева от Луны (и ближе к горизонту) расположена Венера V, а справа — Юпитер J. Ограничение, связанное с возможностью наблюдения Венеры, также устанавливает время суток и полушарие: либо оба снимка сделаны перед рассветом в северном полушарии (и наблюдается стареющий месяц), либо оба снимка сделаны после захода Солнца в южном полушарии (и наблюдается растущий месяц).

Также заметим, что максимальная ширина изображений порядка десятка лунных диаметров, то есть угол обзора составляет всего несколько градусов, что позволяет нам пользоваться приближением «плоского» неба и обойтись без использования сферической тригонометрии.

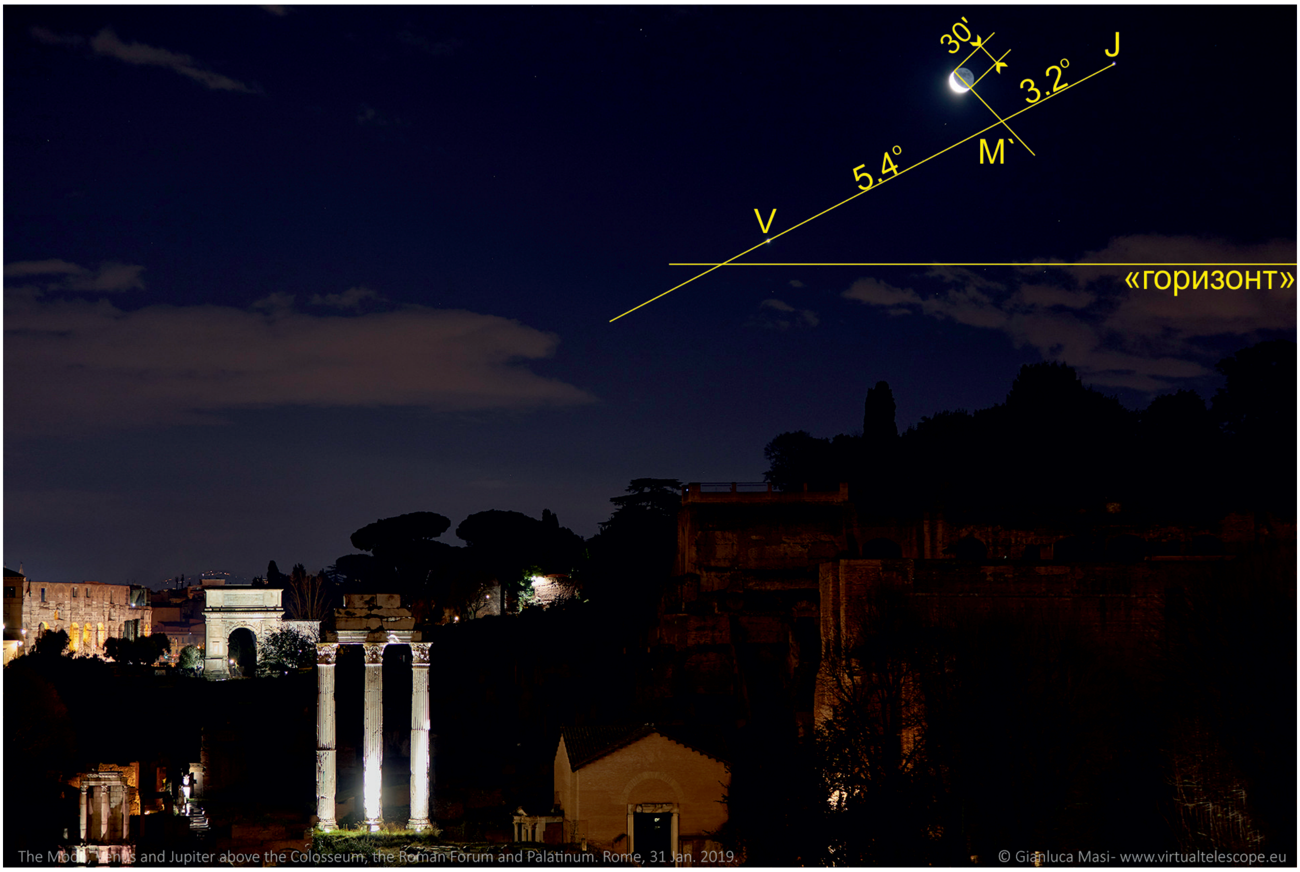
Соединим планеты линией и проведем ее до края снимка — эта линия по условию будет совпадать с эклиптикой. Соединим «рога» месяца и проведем линию до пересечения с первой. Полученное пересечение обозначим как точку M' — проекцию Луны на эклиптику. Можно заметить, что точка M' на обоих изображениях делит отрезок между планетами в разной пропорции из-за что Луна сдвинулась по небу за время между снимками. Так как фотографии сделаны в одни солнечные сутки, то будем считать, что ни Венера, ни Юпитер заметно не сдвинулись. Измерим расстояние между планетами в диаметрах Луны (его необходимо измерять между «рогами», чтобы исключить эффект расширения яркой части Луны на фотографии из-за перезасветки) и переведем в угловые величины, считая, что видимый диаметр Луны равен $30'$. Получим, что на верхнем снимке $VM' = 5^\circ.4$, а $M'J = 3^\circ.2$. На нижнем фото $VM' = 5^\circ.8$, а $M'J = 2^\circ.8$. Таким образом, можно заключить, что Луна прошла $0^\circ.4$ за время





К задаче № 74.

между снимками. Для примера приведем все необходимые построения на одном из оригинальных снимков (на нижнем, на верхнем процедура аналогична).



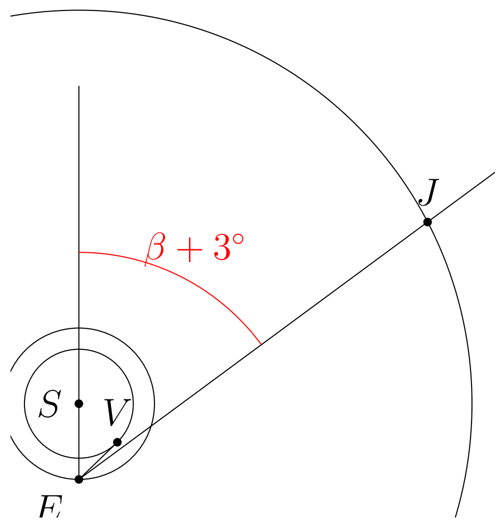
Так как сидерический период Луны равен 27.3 суткам, то за сутки Луна смещается на 360°/27.3 на небе. Это дает промежуток времени

$$t = 0.4^\circ \cdot \frac{27.3}{360^\circ} \cdot 24^h \approx 0.73^h \approx 44^m.$$

Для определения расстояния до планет необходимо как можно точнее определить фазу Луны. Так как обе фотографии явно пересвечены (отлично видна неосвещенная сторона Луны), то лучше измерить долю неосвещенного диаметра Луны и соотнести ее к расстоянию между «рогами». В обоих случаях получится примерно одинаковая фаза, хотя Луна и прошла примерно свой диаметр за это время. Должно получиться около 0.19. Так как измерения линейкой на фотографии дают ощутимые погрешности, то фаза может получиться и больше, но есть ограничения из-за факта наблюдения Венеры. Полученная фаза позволяет определить косинус угла Солнце–Земля–Луна: $\cos\beta = 0.62$. При помощи линейки и транспортира (или приближенных вычислений) можно определить и сам угол: $\beta \approx 52^\circ$. Если учесть, что расстояние между Луной и Венерой в этот момент около 6°, то подобная ситуация возможна лишь когда Венера находится в максимальной элонгации, причем еще и в афелии своей орбиты (собственно, это и есть ограничение на фазу Луны). Если считать, что любители астрономии находятся в южном полушарии, то речь идет о восточной элонгации Венеры, и верхнее фото сделано раньше, чем нижнее. Если же считать, что фотографы находятся в северном полушарии, то Венера находится в западной элонгации, и нижнее фото сделано раньше верхнего. В реальности Венера была в западной элонгации 4 января 2019 года, и знание этого факта позволяет верно отождествить полушарие.

31 января Солнце находится в Козероге. Если считать, что Венера отстоит от него на 45°, то в случае наблюдения из северного полушария необходимо «отнять» от положения Солнца 45–47 дней и получить созвездие Змееносца (на самом деле в этот момент Венера переходит из созвездия Змееносца в созвездие Стрельца). Если считать, что наблюдения ведутся из южного полушария, то 45–47 дней необходимо «прибавить» и получить созвездие Рыб.

Теперь нарисуем расположение всех планет: S — Солнце, E — Земля, V — Венера, J — Юпитер, а Луну изображать необязательно. Если аккуратно соблюдать масштаб, то искомые расстояния можно измерить линейкой (либо, при менее аккуратных построениях, решить соответствующие треугольники). Т.к. Венера рядом с элонгацией, то расстояние до нее получается равным 0.72 а.е. До Юпитера (тем или иным способом) — 5.8 а.е. Данная картинка верна для обоих полушарий: если речь об утре в северном полушарии, то планеты движутся против часовой стрелки, а северный полюс «смотрит на нас». Для вечера в южном полушарии — все наоборот.



Снова отталкиваясь от того, что наблюдается Венера, можно предположить, что фотографии сделаны примерно на одной высоте над горизонтом. Земля за это время повернулась на угол $44^m \times 15°/\text{час} = 11°$, что равно разности долгот двух пунктов. Если измерить угол между «горизонтом» и эклиптикой на обеих фотографиях, то разность этих углов даст разность широт населенных пунктов: действие в обоих случаях происходит около точки востока (в северном полушарии) или точки запада (в южном полушарии). Получится $27° - 17° = 10°$. Таким образом, расстояние между фотографами по теореме Пифагора составит примерно 15° по поверхности Земли, или $15° \cdot 111$ км $= 1650$ км.

На самом деле верхняя фотография сделана в Лондоне ($51°30'$ с.ш., $0°8'$ в.д.), а нижняя — в Риме ($41°54'$ с.ш., $12°30'$ в.д.), что видно по надписи на уже использованной в решении исходной фотографии. Приведем также фотографию из Лондона:

Задача № 75

Астероид 54509 YORP неравномерно вращается вокруг своей оси. На графике ниже показана поправка к фазовому углу в градусах (как функция времени), которую необходимо добавлять к зависимости фазового угла от времени для равномерного вращения, чтобы результат соответствовал наблюдательным данным. Определите вид зависимости наблюдаемого фазового угла от времени и найдите параметры этой зависимости. Предложите возможные причины подобной неравномерности. По оси абсцисс отложено время в сутках (начиная с 27 июля 2001 года), по оси ординат — поправка к фазовому углу в градусах. Подписи к точкам на графике — год получения соответствующих данных.

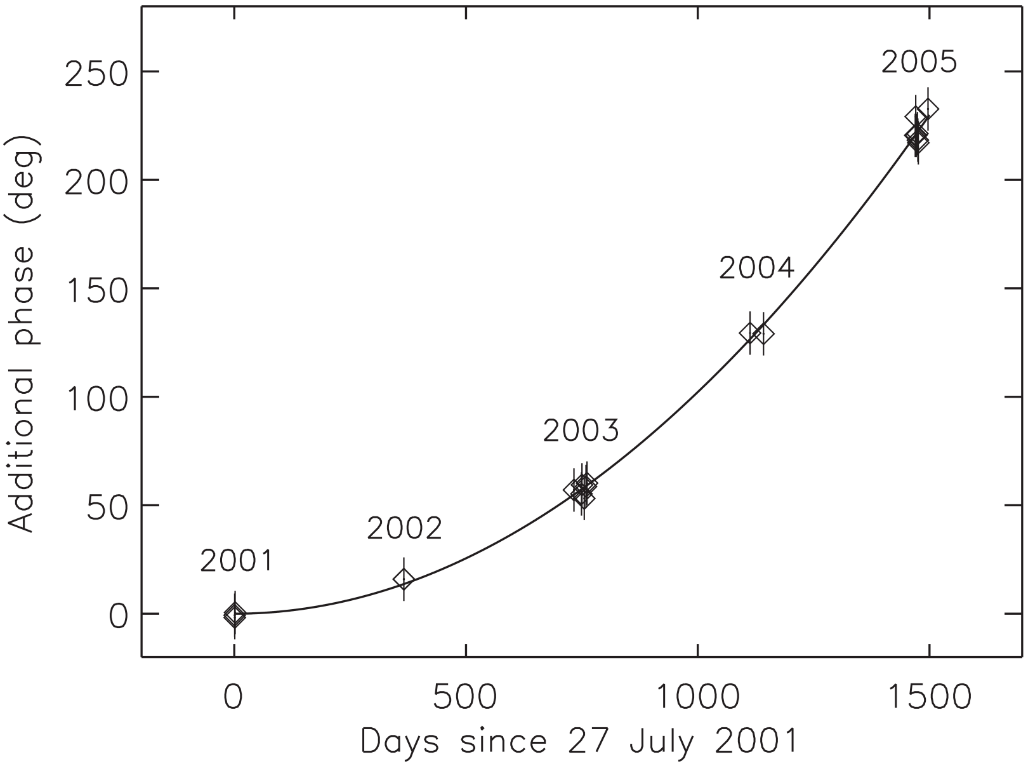
Решение. Если бы астероид вращался равномерно, то описать зависимость наблюдаемой фазы от времени можно было бы так:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t, \tag{1}$$

где φ_0 — фаза в начальный момент времени ($t = 0$), а ω — угловая скорость. Реально наблюдаемая фаза описывается так:

$$\varphi_{real}(t) = \varphi(t) + \varphi_{add}. \tag{2}$$

Посмотрев на график, можно заметить, что кривая на нем хорошо описывается параболой вида $\varphi_{add} = 0.5\beta t^2$. Коэффициент 0.5 выбран для



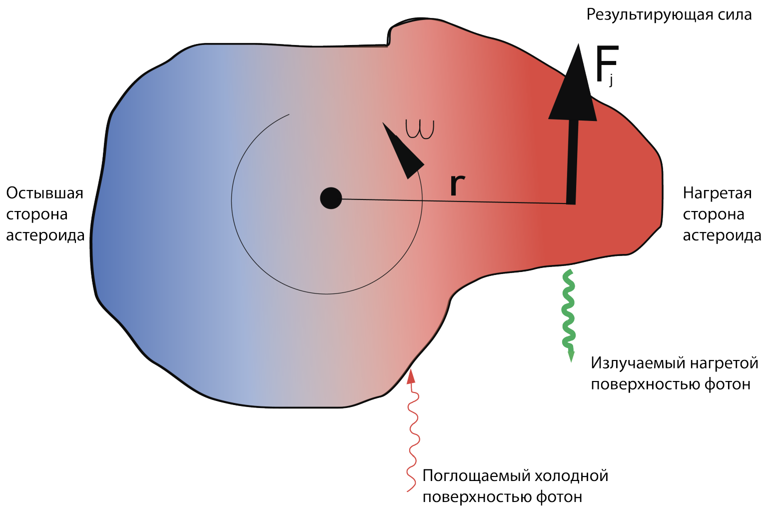
К задаче № 75.

того, чтоб наблюдаемая фаза описывалась уравнением, схожим с уравнением равноускоренного прямолинейного движения:

$$\varphi_{real}(t) = \varphi_0 + \omega t + \frac{\beta t^2}{2}. \quad (3)$$

Значит, β — угловое ускорение, которое как раз и характеризует неравномерность вращения.

При помощи линейки можно определить положения точек на графике и вычислить параметр $\beta = 2.0 \times 10^{-4}$ °/сут^2.



Наличие этого ускорения вызвано т.н. эффектом ЯОРП (эффект Ярковского–О'Кифа–Радзиевского–Пэддэка). Для данного астероида этот эффект наиболее сильный, именно поэтому он и получил такое название. Суть эффекта в том, что вращающийся вокруг своей оси астероид неравномерно нагревается Солнцем: когда нагретая сторона отворачивается от Солнца, холодная сторона только начинает нагреваться. Тепловое излучение от нагретой стороны сильнее, нежели от холодной, что и дает астероиду небольшую реактивную силу. Если бы астероид был сферическим, то эта реактивная сила лишь разгоняла бы астероид, изменяя его орбиту (эффект Ярковского). В реальности астероид имеет неправильную форму, поэтому появляется сила, действующая не радиально, а на некоторое плечо относительно центра масс астероида, тем самым вызывая изменение скорости вращения.